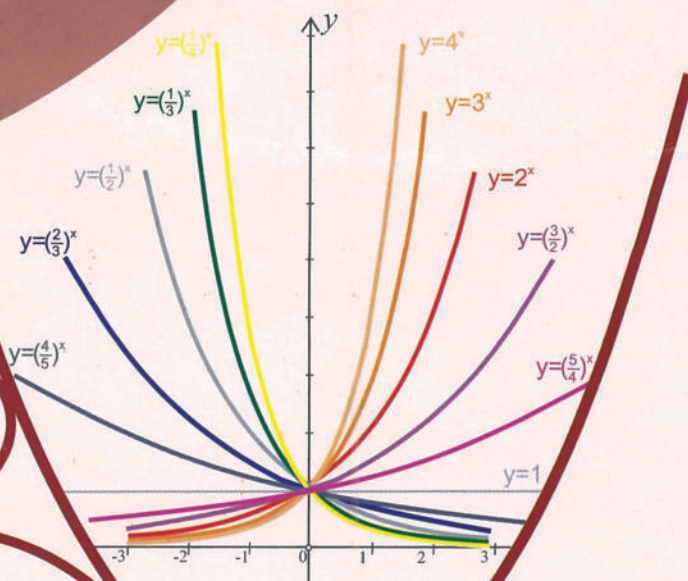
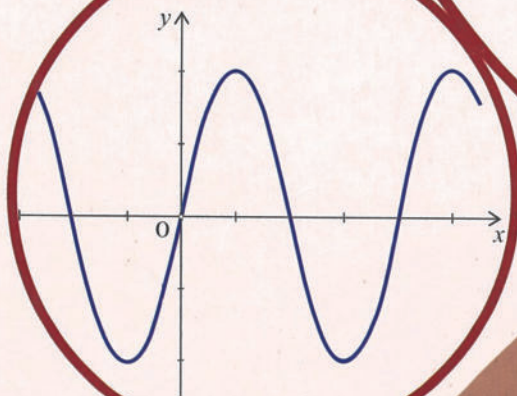


JORDANKA MITEVSKA
IVAN TRAJKOV
LILJANA GRIBOVSKA - POPOVIQ

MATEMATIKA

PËR VITIN III
ARSIMI I
GJIMNAZIT TË
REFORMUAR

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



3

Dr. Jordanka MITEVSKA
Ivan TRAJKOV
Liljana GRIBOVSKA-POPOVIQ

MATEMATIKA

PËR VITIN III
TË GJIMNAZIT TË REFORMUAR



PROSVETNO DELLO SHA
Shkup, 2018

Redaktor i botimit origjinal:
Aleksandra MASIN

Redaktor i botimit në gjuhën shqipe:
Dr. Gjergj GJURAVÇAJ

Recensues:

Dr. Marija OROVÇANEC, profesoreshë ordinare në FMN
– Shkup

Frosina MITRUSHEVA, profesoreshë në SHMSH „Rade
Jovčevski-Korçagin” – Shkup

Silobodanka BOCEVA, profesoreshë në SHMSH „Braça
Milladinovci” – Shkup

Со решение на министерот за образование и наука на
Република Македонија бр. 07-5821/1 од 23.09.2003
година, се одобрува употребата на овој учебник.

Me vendim të ministrit të arsimit dhe shkencës të
Republikës së Maqedonisë nr. 07-5821/1 të datës
23.09.2003, lejohet përdorimi i këtij libri.

PARATHËNIE

Librin që e keni para jush është dedikuar për të mësuar lëndën e obligueshme Matematikën në vitin e tretë të arsimit të reformuar të gjimnazit e cila mësohet me fondin e tre orë në javë. Ai është në mënyrë komplete i përpunuar sipas programit mësimor të matematikës i lejuar nga Ministria e arsimit dhe shkencës të vitit 2002.

Duke e respektuar strukturën e përmbajtjeve të parapara me programin mësimor në libër materiali është ndarë në katër tema: **Funksionet eksponenciale dhe logaritmike, Trigonometria, Elementet e kombinatorikës dhe gjasës dhe Gjeometria analitike.** Specifikat dhe ndryshimet në përpunimin e materialit kërkon ecuri të kujdesshme dhe të ndryshme nga parashtrimi i përmbajtjeve mësimore nga ana e autorëve. Përvoja shumëvjeçare në praktikën arsimore u mundësoi autorëve të kenë ndjenjë për nevojat dhe kërkesat e nxënësve, pra shpresojnë se kanë sukses të imponohen me sitilin të afërt dhe të kuptueshëm për ata.

Në libër autorët kanë pasur kujdes për kërkesat dhe qëllimet konkrete të shënuara në program, si edhe për aftësitë psikofizike të nxënësve në këtë moshë. Prandaj dikund sqarimet janë të shkurta dhe të qarta, matematikisht precize të parashtruara, dikund shumë të gjata dhe të përmbajtura me numër të mjaftueshëm të shembujve dhe ilustrimeve që tu mundësojnë nxënësve sa më lehtë në mënyrë të pavarur ta përvetësojnë materialin e parashtruar. Në çdo temë pjesa teorike është mbështetur me shembuj të zgjedhur të cilët duhet t'i ndihmojnë nxënësit ta përcjellë materialin dhe vetë logjikisht të gjykojë dhe në mënyrë krijuese të futet në të mësuarit e të njëjtës. Atje ku është e nevojshme shembujtë janë ilustruar me vizatime të qarta të cilat janë në funksion të njohurive më të mira të materialit të parashtruar. Pas çdo njësie mësimore nxënësit i ofrohen detyra konkrete, të matura dhe metodikisht të radhitura sipas peshës. Ato do t'i mundësojnë të vetkontrollohet, pasi për të gjitha në fund të librit janë dhënë rezultate, për udhëzimet më të vështira për zgjidhje, në shumë prej tyre edhe zgjidhje komplete. Gjithashtu në fund të çdo teme ofrohen detyra për ushtrime, me qëllim libri të jetë tërësi nga pjesa teorike dhe praktike dhe në mënyrë optimale të shfrytëzohet, pa nevojë nga literaturë tjetër plotësuese në të mësuarit e materialit.

Dhe në fund, autorët shpresojnë se angazhimi i tyre përmbajtjet t'i prezantojnë, me rigorozitetin e domosdoshëm matematikor në mënyrë të mundshme sa më thjeshtë, t'i pasurojnë me zgjedhje të drejtë, studioze të menduara dhe me shembuj me kujdes të ilustruar, do tu mundëson nxënësve të udhëhequr prej librit, në mënyrë të pavarur përvetësimin e materialit të paraparë për të mësuar në vitin e tretë të arsimit të reformuar të gjimnazit.

PËRMBAJTJA

Parathënie.....	3
-----------------	---

TEMA 1.

FUNKSIONI EKSPONENCIAL DHE LOGARITMIK

1.1. Funksioni eksponencial

1.1.1. Vijimi dhe grafiku i funksionit eksponencial	7
1.1.2. Barazimi eksponencial.....	16

1.2. Funksioni logaritmik

1.2.1. Koncepti për logaritëm.....	18
1.2.2. Rregullat themelore të logaritimizimit.....	21
1.2.3. Lidhjet ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme.....	25
1.2.4. Vijimi dhe grafiku i funksionit logaritmik.....	27
1.2.5. Barazimet logaritmike	32
Detyra për përsëritje dhe përforsim	35

TEMA 2.

TRIGONOMETRIA

2.1. Funksionet trigonometrike prej çfarëdo këndi

2.1.1. Zgjerimi i konceptit për kënd dhe matja e këndit.....	37
2.1.2. Përkufizimi i funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi	42
2.1.3. Përkufizimi i funksioneve trigonometrike në vijën rrethore trigonometrike	46
2.1.4. Përcaktimi grafik i këndit dhe vlerës së funksioneve trigonometrike për vlerën e dhënë të njërit prej funksioneve. Shenja e funksioneve trigonometrike	49
2.1.5. Vlerat e funksioneve trigonometrike prej disa këndeve	52
2.1.6. Disa relacione ndërmjet funksioneve trigonometrike	56
2.1.7. Njehsimi i vlerës së funksioneve trigonometrike sipas vlerës të njërit prej tyre	59
2.1.8. Vetitë themelore të funksioneve trigonometrike	62
2.1.9. Sjellja e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi në funksione trigonometrike prej këndit të ngushtë.....	68

2.2. Grafiku i funksioneve trigonometrike

2.2.1. Vijimi dhe grafiku i funksioneve elementare trigonometrike	73
2.2.2. Vijimi dhe grafiku i funksionit $y = a \sin (bx+c) + d$	81
2.2.3. Vijimi dhe grafiku i funksionit $y = a \cos (bx+c) + d$	90

2.3. Transformimi i shprehjeve trigonometrike

2.3.1. Teoremat adicionele për funksionet trigonometrike	92
2.3.2. Funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe gjysmëkëndit.	95
2.3.3. Transformimi i prodhimit dhe shumës të funksioneve trigonometrike	98

2.4. Barazimet trigonometrike

2.4.1. Barazimet themelore trigonometrike	101
2.4.2. Zgjidhja e disa barazimeve trigonometrike	106

2.5. Të zgjidhurit e çfarëdo trekëndëshi

2.5.1. Teorema e sinusit	112
2.5.2. Teorema e kosinusit	116
2.5.3. Zbatimi i teoremave në disa detyra nga praktika	119
Detyra për përsëritje dhe përforsim	122

TEMA 3.

ELEMENTET E KOMBINATORIKËS DHE GJASËS

3.1. Kombinatorika

3.1.1. Induksioni matematikor	125
3.1.2. Variacionet	128
3.1.3. Permutacionet	133
3.1.4. Kombinacionet	137
3.1.5. Formula e binomit	142

3.2. Gjasa

3.2.1. Eksperimenti. Ngjarja. Gjasa statistike	146
3.2.2. Bashkësia e ngjarjeve të rastit	150
3.2.3. Përkufizimi klasik i gjasës	153
Detyra për përsëritje dhe përforsim	156

TEMA 4.

GJEOMETRIA ANALITIKE

4.1. Koordinatat e pikës dhe vektorit në sistemin kënddrejtë koordinativ

4.1.1. Sistemi kënddrejtë koordinativ	160
4.1.2. Operacionet me vektor të dhënë me koordinatat në sistemin koordinativ	164
4.1.3. Largësia ndërmjet dy pikave	166
4.1.4. Ndarja e segmentit në raport të dhënë	168

4.2. Drejtëza në rrafsh

4.2.1. Forma eksplicite dhe e përgjithshme e barazimit të drejtëzës	172
4.2.2. Barazimi i drejtëzës që kalon nëpër një pikë. Barazimi i drejtëzës që kalon nëpër dy pika	176
4.2.3. Forma segmentale e barazimit të drejtëzës.	179
4.2.4. Prerja e dy drejtëzave. Këndi ndërmjet dy drejtëzave	182
4.2.5. Kushti për paralelizëm dhe normale të drejtëzave	185
4.2.6. Forma normale e barazimit të drejtëzës	187
4.2.7. Largësia prej pikës deri te drejtëza	190
Detyra për përsëritje dhe përforsim (4. 1 dhe 4. 2)	194

4.3. Lakoret e rendit të dytë

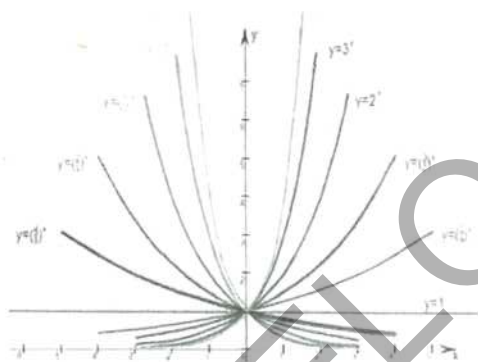
4.3.1. Vija rrethore. Barazimi i vijës rrethore	197
4.3.2. Pozita reciproke e drejtëzës dhe vijës rrethore	201
4.3.3. Barazimi i tangjentës dhe normales në pikën e vijës rrethore	206
4.3.4. Elipsa. Barazimi qendror i elipsës	209
4.3.5. Pozita reciproke e drejtëzës dhe elipsës	214
4.3.6. Barazimi i tangjentës dhe normales në pikën e elipsës	217
4.3.7. Hiperbola. Barazimi i hiperbolës	219
4.3.8. Pozita reciproke e drejtëzës dhe hiperbolës	225
4.3.9. Barazimi i tangjentës dhe normales në pikën e hiperbolës	228
4.3.10. Parabola. Barazimi i parabolës	230
4.3.11. Pozita reciproke e drejtëzës dhe parabolës	234
4.3.12. Barazimi i tangjentës dhe normales në pikën e parabolës	236
Detyra për përsëritje dhe përforsim (4. 3)	238

PËRGJIGJE DHE ZGJIDHJE TË DETYRAVE	242
--	-----

ALFABETI I KONCEPTEVE	267
-----------------------------	-----



Lulja e lotosit



Lulja e lotosit prej funksioneve eksponenciale

Matematika është njëra ndër shkencat më të mëdhaja dhe më të rëndësishme. Ajo me zbulimet e saja është bazë për zbulimet në shkencat tjera natyrore. Në të zbulimet radhiten spontanisht ngadal, me durim, në mënyrë të kontinuar, me bazë, sistematikisht. Pikërisht në të është edhe fuqia dhe forca e saj. Kontributi i saj për civilizimin është shumë i madh. Ajo është çdokund, në çdo kohë dhe në çdo vend.

Motoja e saj është: *Vëre, kupto, trego, krijo!* Në natyrë ekzistojnë një varg i proceseve të cilat matematika i zbulon dhe me besnikëri, në mënyrë më ekonomike i lajmëron. Qe një shembull për atë:

Shembull:

Në një hulumtim popullacioni i mushkonjave të verës zmadhohet sipa ligjit për rritjen eksponenciale: $y = ae^{bt}$, ku y është numri i mushkonjave për kohën t . Në fillim ka pasur numër të caktuar të mushkonjave, pas dy ditë ka pasur 100, pas katër ditë 300 mushkonja. Sa mushkonja do të ketë pas pesë ditë?

Nëse i zëvendësojmë këto informacione në modelin sipas të cilit kryhet rritja e popullacionit të mushkonjave të verës do ta fitojmë këtë sistem të barazimeve:

$$\begin{cases} 100 = ae^{2b} \\ 300 = ae^{4b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{100}{e^{2b}} \\ \frac{300}{100} = \frac{ae^{4b}}{ae^{2b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{100}{e^{2b}} \\ 3 = e^{2b} \end{cases}$$

Me logaritimizim, të barazimit të dytë prej sistemit fitojmë:

$$\ln 3 = \ln e^{2b} \Leftrightarrow \ln 3 = 2b \ln e \Leftrightarrow b = 1/2 \ln 3 \Rightarrow b \approx 0,5493.$$

Nëse vlerën $b = 1/2 \ln 3$ e zëvendësojmë në barazimin e parë prej sistemit, për a fitojmë:

$$a = \frac{100}{e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln 3}} = \frac{100}{e^{\ln 3}} = \frac{100}{3} \quad \text{Domethënë pas pesë ditë do të ketë } y = 100/3 e^{0,5493 \cdot 5} \approx 520 \text{ mushkonja.}$$

Në këtë shembull sigurisht ka shumë pyetje, koncepte dhe njehsime që i ke të panjohura. Përgjigjet për ato do t'i gjesh në temën që vijon. Pas përvetësimit të përmbajtjeve prej të njëjtës edhe vet do të mundesh t'i realizosh.

FUNKSIONI EKSPONENCIAL DHE LOGARITMIK

1.1. FUNKSIONI EKSPONENCIAL

Shumë procese në natyrë mund të përshkruhen me ndihmën e funksionit eksponencial. Ato janë procese të zbërthimit radioaktiv, ndryshimi i shtypjes atmosferike me zmadhimin e lartësisë mbidetare zmadhimi i numrit të bakterieve në procesin e shumimit të tyre, thyerja e dritës gjatë kalimit nëpër shtresën e ujit etj. Prandaj me interes është shqyrtimi i këtyre funksioneve.

1.1.1. VIJIMI DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT EKSPONENCIAL

Në vitin e kaluar shkollor e mësove funksionin $f(x) = x^2$, ku baza e fuqisë është ndryshorja x , kurse treguesi është konstanta, atë e quajtm funksion katror. Këtë vit shkollor do ta mësosh funksionin e formës $f(x) = 2^x$ (dhe të ngjashme me të) ku baza është konstante, kurse treguesi (eksponenti) është ndryshore x , atë do ta quajmë **funksion eksponencial**. Që të mund ta përkufizojmë duhet të kryejmë zgjerimin e fundit të konceptit fuqi, këtë herë me tregues numër iracional, me çka do të jetë përkufizimi komplet i fuqisë me tregues numër real.

1. Zgjerimi i konceptit fuqi

E ke të njohur se sipas përkufizimit për fuqi si prodhim prej shumëzuesëve të barabartë, simboli a^n , ku $a \in \mathbb{R}$, ka kuptim vetëm për n numër natyror, pasi është e mundshme të shumëzohen dy, tre, katër etj., shumëzues të cilë janë të barabartë ndërmjet veti. Simbolet: $a^0, a^{-1}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\sqrt{2}}, a^x, \dots$, nuk kanë kuptim në bashkësinë e numrave natyrorë, pasi nuk mund të kuptohet numri a të shumëzohet me vetveten 0 herë, ose (-1) herë, ose gjysmë herë, ose numër racional $\sqrt{2}$ herë. Prandaj simbolit a^n , ku n nuk është numër natyror mund t'i jepet vlerë vetëm sipas përkufizimit. Në të mësuarit e gjertanishëm për konceptin fuqi je njohur me: përkufizimin e fuqisë me tregues numër të plotë (atëherë ishte futur kufizimi i parë $a \neq 0$) dhe fuqi me tregues numër racional, të shprehur si numër dhjetor me numër të fundëm të vendeve dhjetore ose numrit dhjetor të pafundëm periodik, (atëherë ishte futur kufizimi i dytë $a > 0$). E ke të njohur se për fuqinë me tregues numër të plotë, përkatësisht numër racional vlejné këto veti:

1 ⁰ .	$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$	6 ⁰ .	$a^1 = a,$
2 ⁰ .	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0;$	7 ⁰ .	$a^0 \stackrel{def}{=} 1, a \neq 0;$
3 ⁰ .	$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$	8 ⁰ .	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0;$
4 ⁰ .	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$	9 ⁰ .	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0; n > 1;$
5 ⁰ .	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0;$	10 ⁰ .	nëse $a > 0$, atëherë $a^n > 0$.

Tani do të tregojmë si fuqia a^x fiton kuptim, për $a > 0$ dhe x çfarëdo numër iracional (numër dhjetor joperiodik me numër të pafundëm të vendeve dhjetore). Me këtë e kemi zgjerimin e fundit të konceptit fuqi me tregues numër real, ku vetitë $1^0 - 10^0$ edhe më tutje vlejnë.

Ideja themelore është shumë e thjeshtë. Për çfarëdo numër iracional x , $x > 0$ do të marrim $a^x \approx a^r$, ku r është numër racional i cili ka numër të fundëm të vendeve dhjetore dhe vlerë përafërsisht me vlerën e numrit iracional x .

E dinë se $\pi \approx 3, 1415926 \dots$. Nëse marrim $\pi \approx 3, 14$, atëherë $a^\pi \approx a^{3,14}$ ($a > 1$). Saktësi edhe më e madhe fitohet nëse merret vlera e përafërt për π të ketë më shumë vende dhjetore, d. m. th. më saktë është $a^\pi \approx a^{3,14159}$.

Ose, për shembull: $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1,41}$, ku numri iracional $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$, domethënë $1 < \sqrt{2} < 2$. Edhe përsëri, sikurse më lartë saktësi më e madhe fitohet nëse merret vlera e përafërt për $\sqrt{2}$ të ketë më shumë vende dhjetore dhe atëherë $2^{\sqrt{2}}$ i takon çdonjërit prej intervaleve:

$$(2^1, 2^2) \supset (2^{1,4}, 2^{1,5}) \supset (2^{1,41}, 2^{1,42}) \supset (2^{1,414}, 2^{1,415}) \supset \dots$$

përkatesisht

$$(2, 4) \supset (2, 639; 2, 828) \supset (2, 657; 2, 676) \supset (2, 665; 2, 667) \supset \dots$$

Intervale të ngushta dhe afrohen me saktësi të madhe kah numri $2^{\sqrt{2}}$, që është ilustruar në fig. 1. (Të përmendim se këtu është e përshtatshme të përdoret shënimi $A \supset B$, lexohet A është mbibashkësi prej B, por do të thotë B është nënbashkësi prej A).

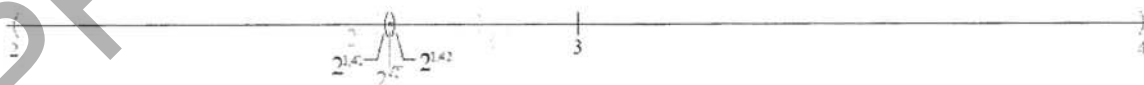


fig. 1.

Shqyrtim të ngjashëm mund të bëhet edhe kur baza e fuqisë është numër a , ku $0 < a < 1$.

Mund të tregohet se këto fuqi me tregues racionalë, sa treguesët më shumë afrohen deri te numri iracional (duke marrë sa më shumë vende dhjetore), përcaktojnë numër të vetëm real, ashtu që të jenë plotësuar vetitë $1^0 - 10^0$.

Vërtetimi i tejkalon kornizat e matematikës së shkollës së mesme, kurse mënyra që u parashtruar më lartë duhet vetëm të mundëson ta kuptosh ekzistimin e numrit të vetëm real a^x për $a > 0$ dhe x çfarëdo numër real. Dhe në fund të këtij shqyrtimi të vërejmë se për fuqi me tregues real vlen:

-Për çdo $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$ dhe $x \in \mathbf{R}$ të atillë që $r \leq x \leq s$, ku r dhe s janë numra racionalë,

a^r është numër real për të cilin vlen $a^r \leq a^x \leq a^s$.

-Për $a = 1$ dhe $x \in \mathbf{R}$, vlen $a^x = 1$.

-Për çdo $a \in \mathbf{R}$, $0 < a < 1$ dhe $x \in \mathbf{R}$ i atillë që $r \leq x \leq s$, ku r dhe s janë numra racionalë, a^x është numër real për të cilin vlen $a^r \geq a^x \geq a^s$.

> **Shembulli 1.** T'i krahasojmë numrat sipas madhësisë: a) $3^{\frac{1}{4}}$ dhe $3^{\sqrt{5}}$; b) $0,2^{\sqrt{2}}$ dhe $0,2^{0,1}$.

Zgjidhje. a) Të vërejmë se baza e fuqive është 3, ku $3 > 1$, kurse për treguesin $\frac{1}{4} < \sqrt{5}$, ku

$\sqrt{5} \approx 2,236$. Domethënë: $3^{\frac{1}{4}} < 3^{\sqrt{5}}$.

b) Këtu të vërejmë se baza e fuqive është 0,2, ku $0 < 0,2 < 1$, ndërsa për treguesët kemi: $0 < \sqrt{2}$. Domethënë: $0,2^{0,1} > 0,2^{\sqrt{2}}$.

2. Koncepti dhe vetitë themelore të funksionit eksponencial

Përkufizimi. Funksioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, të dhënë me funksionin $f(x) = a^x$, ku $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ dhe $a \neq 1$ quhet **funksion eksponencial**.

Prej përkufizimit, si edhe prej vetive $1^0 - 10^0$, të cilat vlejnë edhe për fuqi me tregues numër real mund t'i përmendim këto veti të funksionit eksponencial:

- 1⁰. Domeni $\mathbf{D}_f$ (fusha e përkufizimit) për funksionin eksponencial $f(x) = a^x$ është bashkësia e numrave realë, d. m. th. $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$.
- 2⁰. Bashkësia $\mathbf{V}_f$ të vlerave të funksionit eksponencial $f(x) = a^x$ është: $\mathbf{V}_f = \mathbf{R}^+$.
- 3⁰. Për $x=0$, funksioni eksponencial $f(x) = a^x$ ka vlerë $f(0) = 1$.
- 4⁰. Funksioni eksponencial $f(x) = a^x$, për $a > 1$ monotonisht rritet, ndërsa për $a < 1$ monotonisht zvogëlohet, në tërë domenin $\mathbf{D}_f$.

Vërtetimi. Vetitë 1⁰ dhe 2⁰ vijnë drejtpërdrejt prej përkufizimit. Prej $a^0 = 1$, vijnë vetia 3⁰.

Vetinë e fundit 4⁰ do ta vërtetojmë me implikacionet:

a) $a > 1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, d. m. th. $f(x_1) < f(x_2)$.

b) $0 < a < 1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, d. m. th. $f(x_1) > f(x_2)$.

a) Le të jetë $a > 1$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ dhe $x_1 < x_2$, d. m. th. $x_2 = x_1 + h$, ku $h > 0$. Prej $a^h > 1$ vijon:

$$a^{x_2} = a^{x_1+h} = a^{x_1} \cdot a^h > a^{x_1}.$$

b) Përpiku vet, vërtetohet në mënyrë analoge. ■

Si pasojë e vetisë 4^0 nxirren edhe vetitë:

$$5^0. \text{ Nëse } a > 1 \wedge a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2,$$

$$6^0. \text{ Nëse } 0 < a < 1 \wedge a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2,$$

$$7^0. \text{ Nëse } a > 0, a \neq 1 \text{ dhe } a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Vërtetim: Do ta vërtetojmë vetëm pasojën e parë, pasi dy të tjerat vërtetohen në mënyrë analoge. Le të jetë $a > 1$ dhe $a^{x_1} < a^{x_2}$. Për x_1 dhe x_2 i kemi këto mundësi: $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$ ose $x_1 < x_2$. Rasti i parë, $x_1 > x_2$ nuk është i mundshëm atëherë prej vetisë 4^0 vijon $a^{x_1} > a^{x_2}$, që i kundërshton kushtit. Rasti i dytë $x_1 = x_2$, gjithashtu është i pamundshëm pasi atëherë do të kemi $a^{x_1} = a^{x_2}$. Domethënë ngel vetëm $x_1 < x_2$.

➤ **Shembulli 1.** Ta caktojmë fushën e përkufizimit të funksionit:

$$a) y=3^{x+1}, b) y=2^{\frac{1}{x}}, c) y=4^{\frac{1}{x-3}}, d) y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}, e) y=5^{\sqrt{x}}, f) y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-1}}.$$

Zgjidhje. a) Fusha e përkufizimit D është çdo $x \in \mathbb{R}$, d. m. th. $D=\mathbb{R}$,

b) Thyesa $\frac{1}{x}$ është përkufizuar për të gjitha vlerat e x , për të cilat emëruesi është i ndryshueshëm prej zeros, d. m. th. $D=\mathbb{R} \setminus \{0\}$, c) $D=\mathbb{R} \setminus \{3\}$, d) $D=\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

e) Rrënja katrore është përkufizuar për madhësi nënrrënjësores jonegative (pse?), pra fusha e përkufizimit janë të gjitha vlerat $x \in [0, \infty)$, d. m. th. $D=[0, \infty)$, f) $D=[1, \infty)$.

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojmë monotoninë e funksioneve:

$$a) y=0, 3^x, b) y=(\sqrt{2})^x, c) y=4^{x+1}, d) y=\left(\frac{2}{3}\right)^x, e) y=5^{2x}, f) y=\left(\frac{1}{0,2}\right)^x.$$

Zgjidhje. Funksionet nën b), c), d) dhe e) monotonisht rriten, pasi baza e fuqisë është numër më i madh se 1; ndërsa funksionet nën a) dhe f) monotonisht zvogëlohen, pasi baza e fuqisë është numër ndërmjet 0 dhe 1 (vetia 4^0).

3. Grafiku i funksionit eksponencial

Tani ngel që të konstruktojmë grafikun e funksionit eksponencial $f(x)=a^x$ në lidhje me sistemin kënddrejtë koordinativ xOy . Grafiku i funksionit $f(x)=a^x$ është bashkësia e pikave (x, a^x) , $x \in \mathbb{R}$, d. m. th. $G=\{(x, a^x), x \in \mathbb{R}\}$.

Për grafikun e funksionit eksponencial $f(x)=a^x$, sipas asaj që është theksuar gjer më tani, kemi:

-grafiku i funksionit $f(x)=a^x$ gjendet mbi boshtin x ,

-grafiku i funksionit $f(x)=a^x$ e prenë boshtin y në pikën $(0, 1)$, pasi $a^0=1$, për çdo $a \in \mathbb{R}$ dhe $a \neq 1$.

➤ **Shembulli 1.** Ta konstruktojmë grafikun e funksionit: a) $f(x) = 2^x$, b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Zgjidhje. a) Së pari tabelarisht, kurse pastaj edhe grafikisht do ta paraqesim funksionin $f(x) = 2^x$ (fig 1a dhe 1b), do të shkruajmë edhe $f(x) = y$. Vlerat e funksionit i caktojmë në këtë mënyrë: $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $f(0) = 2^0 = 1$, $f(1) = 2^1 = 2$ etj.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(x) = 2^x$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...

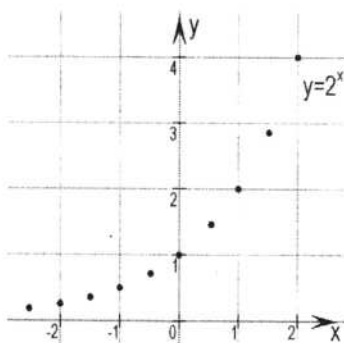


fig. 1a

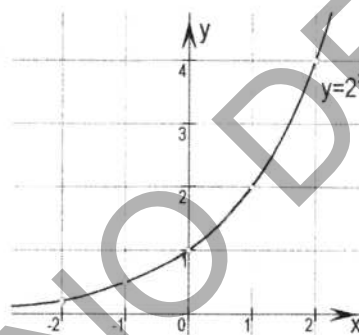


fig. 1b

Prej grafikut të funksionit $f(x) = 2^x$ mund të vërejmë se ai afrohet deri te pjesa negative e boshtit Ox , i cili asnjëherë nuk e prenë. Në këtë rast boshti Ox quhet **asimptotë** e lakores, grafiku i funksionit të shqyrtuar $f(x) = 2^x$.

b) Në të njëjtën mënyrë do ta shqyrtojmë edhe funksionin $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (fig. 2a dhe 2b),

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	...	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...

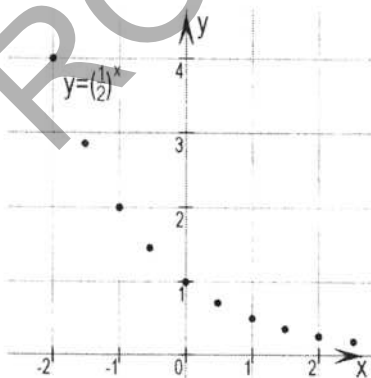


fig. 2a

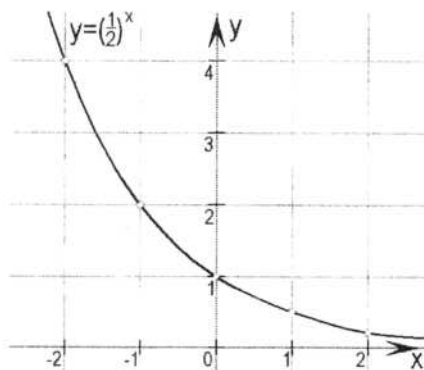


fig. 2b

Prej grafikut të funksionit $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ mund të vërejmë se ai afrohet deri te pjesa pozitive e boshtit Ox , të cilin asnjëherë nuk e prenë. Domethënë boshti Ox paraqitet edhe në këtë rast si *asimptotë* e lakores, grafiku i funksionit të shqyrtuar $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

➤ **Shembulli 2.** Në të njëjtin sistem koordinativ t'i paraqesim grafikët e funksioneve eksponenciale:

a) $y=2^x$, $y=e^x$, $y=3^x$, b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Zgjidhje. Grafikët e funksioneve nën a) janë paraqitur në fig. 3, kurse ato nën b) në fig. 4. Paraqitjen tabelare bëje vet dhe provo saktësinë (vërejtje $e = 2, 7182\dots$) !

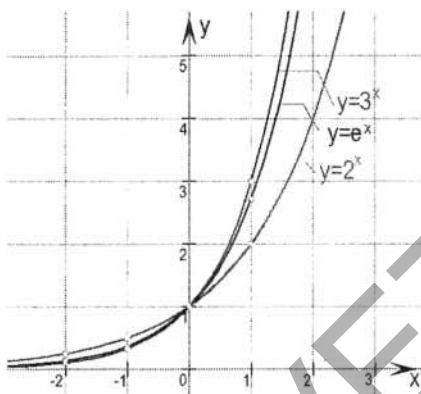


fig. 3

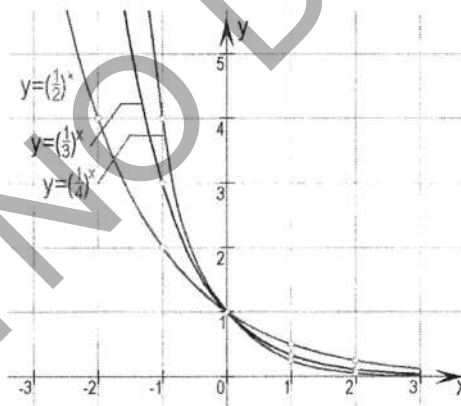


fig. 4

Duke i shikuar grafikët e këtyre funksioneve eksponenciale vërejmë se grafikët e funksioneve përkatëse afrohen deri te boshtet koordinative dhe atë:

- (i) për $a > 1$, kur a rritet; (ii) për $0 < a < 1$, kur a zvogëlohet.

Të vërejmë edhe një veti të funksionit eksponencial duke i shqyrtuar grafikët e tyre në të njëjtin sistem koordinativ.

➤ **Shembulli 3.** Në të njëjtin sistem koordinativ t'i vizatojmë grafikët e funksioneve:

a) $y=2^x$ dhe $y=2^{-x}$, b) $y=3^x$ dhe $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Zgjidhje. Grafikët e funksioneve nën a) janë paraqitur në fig. 5, kurse ato nën b) në fig. 6. Të të përkujtojmë se $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

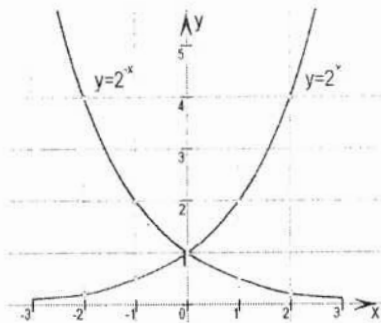


fig. 5

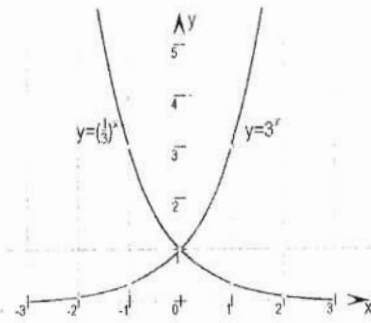


fig. 6

Prej shembujve të gjertanishëm mund të vërehet se grafikët e funksioneve $y=a^x$ dhe $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, janë simetrik në lidhje me boshtin y . Me të vërtetë nëse pika $A(x_0, y_0)$ që i takon grafikut të funksionit $y=a^x$, vlen $y_0=a^{x_0}$. Pika $A_1(-x_0, y_0)$, simetrike me pikën A në lidhje me boshtin y i takon grafikut të funksionit $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, pasi vlen $a^{x_0} = a^{-(-x_0)} = \frac{1}{a^{-x_0}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}$.

4. Grafikët e funksioneve eksponenciale $y=a^x \pm m$, $y=a^{x \pm p}$ dhe $y=a^{x \pm p} \pm m$

Në shembujt që vijojnë do të vërejmë pozitën e grafikut të funksionit sipas shënimit analitik.

> **Shembulli 1.** Në të njëjtin sistem koordinativ t'i vizatojmë grafikët e funksioneve:

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; b) $y=3^x$, $y=3^{x+1}$, $y=3^{x-2}$.

Zgjidhje. Së pari t'i paraqesim funksionet tabelarisht me disa pika, me ndihmën e të cilave do t'i vizatojmë grafikët e tyre, që pastaj ta vërejmë pozitën e tyre:

a) x	-2	-1	0	1	2	b) x	-2	-1	0	1	2	3
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$y=3^x$		$\frac{1}{3}$	1	3		
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$	6	4	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$y=3^{x+1}$	$\frac{1}{3}$	1	3			
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$y=3^{x-2}$				$\frac{1}{3}$	1	3

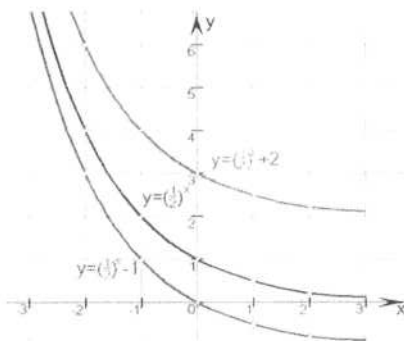


fig. 1

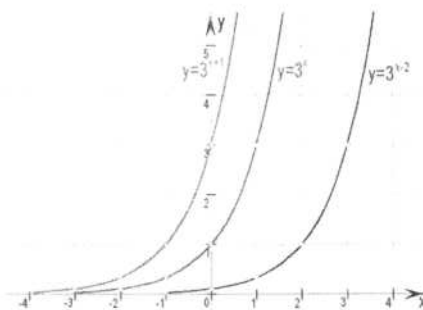


fig. 2

a) Grafikun e funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, e fitojmë prej grafikut të funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ me translacion për dy njësi në kahen pozitive të boshtit y (domethënë lartë), kurse grafikun e funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ e fitojmë prej grafikut të funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ me translacion për një njësi në kahen negative të boshtit y , domethënë poshtë, (fig. 1).

b) Grafikun e funksionit $y = 3^{x+1}$ e fitojmë prej grafikut të funksionit $y = 3^x$ me translacion për një njësi në kahen negative të boshtit x (domethënë majtas), kurse grafikun e funksionit $y = 3^{x-2}$ e fitojmë prej grafikut të funksionit $y = 3^x$ me translacion për dy njësi në kahen pozitive të boshtit x , domethënë djathtas, (fig. 2). ▀

Edhe në rastin e përgjithshëm:

- Grafikun e funksionit $f(x) = a^x + m$, e fitojmë me translacionin e funksionit $y = a^x$ në drejtim të boshtit y për $|m|$ njësi lartë nëse $m > 0$, përkatësisht poshtë nëse $m < 0$.

- Grafikun e funksionit $y = a^{x+p}$, e fitojmë me translacionin e funksionit $y = a^x$ në drejtim të boshtit x për $|p|$ njësi djathtas nëse $p > 0$, përkatësisht majtas nëse $p < 0$.

Ta zbatojmë atë që e kemi mësuar gjer më tani. Në bazë të dy shembujve të fundit lehtë mund të vizatojmë grafikun e funksionit eksponencial $y = a^{x \pm p} \pm m$.

➤ **Shembulli 2.** Ta vizatojmë grafikun e funksionit $y = 3^{x-1} + 2$.

Zgjidhje. Grafikun e funksionit $y = 3^{x-1} + 2$ e fitojmë prej grafikut të funksionit $y = 3^x$ me translacionin për një njësi në kahen pozitive të boshtit x (djathtas) dhe pastaj me translacion për dy njësi në kahen pozitive të boshtit y (lartë), (fig. 3).

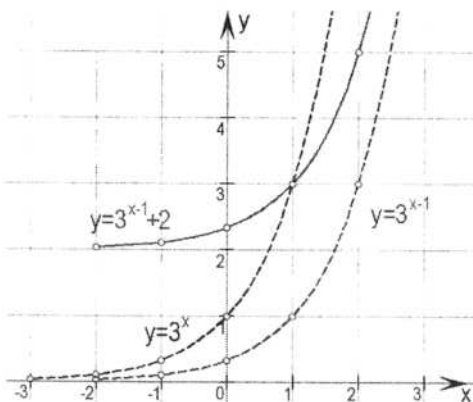


fig. 3

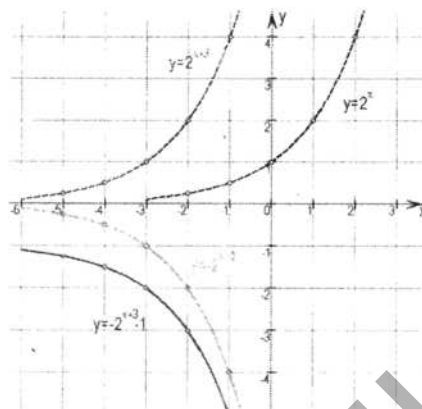


fig. 4

➤ **Shembulli 3.** Ta vizatojmë grafikun e funksionit $y=-2^{x+3}-1$.

Zgjidhje. Grafikun e funksionit $y=-2^{x+3}-1$ e fitojmë prej grafikut të funksionit $y=2^x$ me translacion për tri njësi në kahen negative të boshtit x (majtjas), ku fitojmë grafikun e funksionit $y=2^{x+3}$. Pastaj simetrikisht në lidhje me boshtin x e fitojmë grafikun e funksionit $y=-2^{x+3}$ dhe në fund me translacionin e këtij grafiku për një njësi në kahen negative të boshtit y (poshtë) fitohet grafiku i kërkuar, (fig. 4).

DETYRA

1. Cakto fushën e përkufizimit për funksionet:

a) $y=4^{x-3}$, b) $y=2^{\frac{1}{x}}$, c) $y=5^{\frac{1}{x-3}}$, d) $y=2^{\sqrt{x+3}}$.

2. Cakto monotoninë e funksionit $y=a^x$ nëse: a) $a>1$, b) $0<a<1$, c) $a=1$ dhe skicoji grafikët e tyre në sisteme koordinative të veçanta.
3. Duke i shfrytëzuar vetitë e funksionit eksponencial, cakto cili numër është më i madh:

a) $5^{\sqrt{2}}$ ose $5^{\sqrt{3}}$, b) $(1,5)^{\frac{3}{4}}$ ose $(1,5)^{\frac{2}{3}}$, c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ ose $(0,5)^{\sqrt{2}}$.

4. Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e funksioneve: $y=3^x$ dhe $y=-3^x$. Nxjerr përfundim për pozitën e të njëjtëve.

Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e funksioneve:

5. $y=4^x, y=3^x, y=2^x, y=\left(\frac{3}{2}\right)^x, y=\left(\frac{5}{4}\right)^x, y=1, y=\left(\frac{4}{5}\right)^x, y=\left(\frac{2}{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

6. $y=-3^x, y=-3^x-1$ dhe $y=-3^x+2$.

7. $y=2^x, y=2^{x-1}, y=2^{x-1}-2$.

8. $y=2^x, y=2^{x-2}, y=2^{x-2}+1$.

9. Vizato grafikun e funksionit: $y=-2^{x+1}+2$.

1. 1. 2. BARAZIMI EKSPONENCIAL

Përkufizimi. Barazimi në të cilin e panjohura gjendet në treguesin e fuqisë të paktën një fuqi, me bazë numër real pozitiv, i ndryshueshëm prej 1, quhet **barazim eksponencial**.

Për shembull: $5^x=1$; $2^{x-3}=4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$; $2^{\sqrt{x+3}} = 8+x$; $9^x + 2 \cdot 3^x = 15$; $2^x = 3$ janë barazime eksponenciale.

Zgjidhjet e barazimeve eksponenciale do t'i kërkojmë në bashkësinë e numrave realë. Metodë e përgjithshme për zgjidhjen e tyre nuk ekziston. Por disa lloje të barazimeve eksponenciale mundesh vet t'i zgjidhish duke zbatuar rregulla dhe mënyra që gjer më tani i ke mësuar në matematikë. Këtu do të ndalemi vetëm në format e atilla të barazimeve eksponenciale.

1. Barazimi eksponencial në të cilin me transformimet identike mund të sillet në formën:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0 \text{ dhe } a \neq 1. \quad (1)$$

Në bazë të monotonisë së funksionit eksponencial vijon se $a > 0$ dhe $a \neq 1$, barazimi (1) është ekuivalent me barazimin:

$$f(x) = g(x).$$

Domethënë këtu fuqitë në barazimet eksponenciale i sjellim deri në baza të barabarta.

➤ **Shembulli 1.** T'i zgjidhim barazimet: a) $5^x=25$; b) $2^{x-3}=4$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$;

ç) $3^{x^2-1} = 27$; d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$; e) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

Zgjidhje.

a) $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$;

b) $2^{x-3} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \Rightarrow x = 5$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$;

ç) $3^{x^2-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-1} = 3^3 \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$;

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56 \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$.

e) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x + \frac{1}{9} \cdot 3^x = 5^x + \frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{1}{25} \cdot 5^x \Leftrightarrow$

$$\frac{31}{9} \cdot 3^x = \frac{31}{25} \cdot 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow x = 2.$$

2. Barazimi eksponencial prej formës $F[a^{f(x)}] = 0$, ku $a > 0$ dhe $a \neq 1$, i cili me zëvendësimin $a^{f(x)} = y$ sillet në barazimin $F[y] = 0$.

Nëse zgjidhjet e barazimit $F[y] = 0$ janë y_i ($i=1, 2, \dots$), atëherë zgjidhja e barazimit $F[a^{f(x)}] = 0$ sillet në zgjidhjen e bashkësisë së barazimeve: $a^{f(x)} = y_i$ ($i=1, 2, \dots$).

Në këtë rast themi se barazimin eksponencial e zgjidhim me futjen e zëvendësimit.

➤ **Shembulli 2.** T'i zgjidhim barazimet eksponenciale:

a) $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$; b) $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$; c) $3^{2x+5} - 2 = 3^{x+2}$; d) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$.

Zgjidhje.

a) Pasi $7^{2x} = (7^x)^2$ barazimi $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$ me zëvendësimin $y=7^x$ sillet në barazimin katror sipas y , d. m. th. në barazimin $y^2 - 8y + 7 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1=1$ dhe $y_2=7$. Tani prej barazimit $7^x=1$ ($7^x=7^0$) dhe $7^x=7$ ($7^x=7^1$) vijon se zgjidhjet e barazimit të dhënë janë $x_1=0$ dhe $x_2=1$.

b) Barazimi $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ me zëvendësimin $y=2^x$ sillet në barazimin $y^2 + 3y - 4 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $y_1=-4$ dhe $y_2=1$. Prej këtu kemi: $2^x=-4$ dhe $2^x=1$. Barazimi $2^x=-4$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave realë, ndërsa barazimi $2^x=1$ ka zgjidhje $x=0$, e cila është zgjidhja e vetme për barazimin e dhënë.

c) Barazimi $3^{2x+5} - 2 = 3^{x+2}$ mund të transformohet në formën $3^{2x+4+1} - 3^{x+2} - 2 = 0$ ose $3 \cdot 3^{2x+4} - 3^{x+2} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2(x+2)} - 3^{x+2} - 2 = 0$, i cili me zëvendësimin $y=3^{x+2}$ sillet në barazimin $3y^2 - y - 2 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1=1$ dhe $y_2=-\frac{2}{3}$. Prej tyre vetëm zgjidhja e parë e cila i kënaq kërkesat për zgjidhjen e barazimit eksponencial

(pse!). Prej $y_1=1$ kemi $3^{x+2}=1$, prej ku për zgjidhje të barazimit të dhënë fitojmë $x=-2$.

d) Barazimi $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$ me zëvendësimin $y=3^{\sqrt{x}}$ sillet në barazimin $3y^2 - 4y + 3 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $y_1=1$ dhe $y_2=3$. Prej këtu kemi $3^{\sqrt{x}}=1$ dhe $3^{\sqrt{x}}=3$. Domethënë $\sqrt{x}=0$ dhe $\sqrt{x}=1$, prej ku për zgjidhje të barazimit të dhënë fitojmë $x_1=0$ dhe $x_2=1$.

Nëse dëshirojmë ta zgjidhim barazimin e formës $4^x=3$ do të hasim në probleme anën e majtë dhe të djathtë t'i sjellim me bazë të njëjtë. Këto barazime zgjidhen me një operacion të ri i ashtuquajtur logaritimizim, të cilin do ta fusim në parashtrimin e mëtejshëm.

DETYRA

Zgjidhi këto barazime eksponenciale:

1. a) $4^x = 16$, b) $\frac{1}{3^x} = 27$, c) $5^{-x} = 125$;
2. a) $9^{x+1} = 27$, b) $\sqrt{3^x} = 9$, c) $6^{\sqrt{x-2}} = 36$;
3. a) $27^{x-1} = 9^{x+2}$, b) $2^{x+2} \cdot 3^{x+2} = 36 \cdot 6^{2x-1}$;
4. a) $(9^{x+1})^{x-2} = 1$, b) $5^{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$;
5. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 6$;
6. a) $3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 21$, b) $2^{2x} + 3 \cdot 4^x = 64$;
7. a) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 12 = 0$; b) $4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 9 = 0$;
8. a) $9^x - 3^x - 6 = 0$; b) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 12$;
- *9. a) $2^x + 2^{x-1} = 3^x$, b) $5^x + 5^{x-1} = 6^x$;
- *10. $27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$.

1. 2. FUNKSIONI LOGARITMIK

Funksioni logaritmik është edhe një funksion me të cilin do të njihemi këtë vit shkollor. Ai ka zbatim të madh, si në matematikë ashtu edhe në shkencat tjera natyrore. Por së pari është e nevojshme të njihemi me konceptin e ri, koncepti logaritëm.

1. 2. 1. KONCEPTI PËR LOGARITËM

Gjatë të zgjidhurit e barazimeve eksponenciale vërejtëm se nuk disponojmë me rregulla ose mënyra për zgjidhjen e barazimeve eksponenciale të formës $a^x=b$, ku b nuk mund të paraqitet në formë të fuqisë me bazë a . Përkatësisht barazia $a^x=b$, bazën e fuqisë a e caktojmë me operacionin e rrënjëzimit, b me operacionin e fuqizimit, ndërsa për caktimin e treguesit x fusim operacion të ri *logaritmizimi*, megjithatë zgjidhjen për x e shënojmë me $\log_a b$. Treguesi x quhet *logaritëm*, baza a *baza e logaritmit*, kurse b *logaritmand* ose *numerus*. Mund ta shprehim këtë:

Përkufizimi. Logaritmi i numrit pozitiv real b , për bazë a ($a>0$, $a\neq 1$), është numri real x , me të cilin duhet të fuqizohet baza a , për tu fituar numri b .

Shkruajmë:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

(1)

Barazimin në anën e majtë dhe të djathtë prej ekuivalencës (1) shprehin varësi të njëjtë ndërmjet numrave a , b dhe x , dhe dallohen vetëm sipas formës të shënimit.

Nëse në barazinë $a^x=b$, x e zëvendësojmë me $\log_a b$ e fitojmë relacionin:

$$a^{\log_a b} = b$$

(2)

Barazinë (2) e quajmë identiteti themelor logaritmik dhe ai vlen për $a>0$, $a\neq 1$ dhe $b>0$.

Drejtëpërdrejt prej përkufizimit për logaritëm vijon:

$$1^0 \log_a 1 = 0, \text{ pasi } a^0 = 1.$$

$$2^0 \log_a a = 1, \text{ pasi } a^1 = a.$$

$$3^0 \log_a a^n = n, \text{ pasi } a^n = a^n.$$

Të vërejmë se numri 0 dhe numrat negativë nuk kanë logaritëm në bashkësinë e numrave realë, kurse logaritmet prej disa numrave pozitivë me bazë të dhënë mund të përcaktohen prej përkufizimit.

➤ **Shembulli 1.** Duke e shfrytëzuar përkufizimin për logaritëm të provojmë saktësinë e këtyre barazive: a) $\log_5 5=1$, b) $\log_3 27=2$, c) $\log_{16} 4=\frac{1}{2}$, ç) $\log_{\sqrt{2}} 4=2$, d) $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$.

Zgjidhje. a) Është e saktë, pasi: $5^1=5$. b) Nuk është e saktë, pasi: $3^2 \neq 27$.

c) Kemi: $16^{\frac{1}{2}} = 4$, prej këtu $\sqrt{16}=4$, domethënë është i saktë. ç) Nuk është i saktë, pasi

$$\sqrt{2}^2 = 2. \text{ d) Barazia është e saktë pasi: } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Në shembujt që vijojnë, me zbatimin e përkufizimit për logaritmizim, do të tregojmë se si barazia $\log_a b = x$ caktohet çfarëdo prej numrave realë a , b dhe x , nëse dihen dy të tjerat prej tyre.

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojmë logaritmandin e logaritmeve:

a) $\log_3 b = 2$, b) $\log_5 b = -2$, c) $\log_{0,1} b = -1$, ç) $\log_{\sqrt{2}} b = 4$, d) $\log_{\frac{1}{2}} b = 5$.

Zgjidhje.

a) $\log_3 b = 2 \Rightarrow 3^2 = b \Rightarrow b = 9$, b) $\log_5 b = -2 \Rightarrow 5^{-2} = b \Rightarrow b = \frac{1}{25}$, c) $\log_{0,1} b = -1 \Rightarrow 0,1^{-1} = b \Rightarrow b = 10$,

ç) $\log_{\sqrt{2}} b = 4 \Rightarrow (\sqrt{2})^4 = b \Rightarrow b = 4$, d) $\log_{\frac{1}{2}} b = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = b \Rightarrow b = \frac{1}{32}$.

➤ **Shembulli 3.** Ta caktojmë bazën e logaritmeve:

a) $\log_a 4 = 2$, b) $\log_a 25 = -3$, c) $\log_a \frac{1}{27} = 3$, ç) $\log_a 0,04 = 2$, d) $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{4}$.

Zgjidhje.

a) $\log_a 4 = 2 \Rightarrow a^2 = 4$, prej ku gjejmë $a_1 = 2, a_2 = -2$. Prej përkufizimit për logaritëm kemi se për bazën a të logaritmit vlen $a > 0$, prandaj zgjidhje e detyrës është vetëm $a = 2$.

b) $\log_a 125 = -3 \Rightarrow a^{-3} = 125 \Leftrightarrow a^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$.

c) $\log_a \frac{1}{27} = 3 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow a^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

ç) $\log_a 0,04 = 2 \Rightarrow a^2 = 0,04$. Poashtu zgjidhje është vetëm $a = 0,2$ (pse?).

d) $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a = 3^2 \Rightarrow a = 9$.

➤ **Shembulli 4.** T'i caktojmë logaritmet:

a) $\log_2 8$, b) $\log_5 \frac{1}{25}$, c) $\log_3 \sqrt{3}$, ç) $\log_{\sqrt{2}} 4$, d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$.

Zgjidhje.

a) Le të jetë $\log_2 8 = x$. Prej përkufizimit për logaritëm $2^x = 8$, d. m. th. $2^x = 2^3$, prej ku $x = 3$.

b) Le të jetë $\log_5 \frac{1}{25} = x$, domethënë kemi $5^x = \frac{1}{25}$, përkatësisht $5^x = 5^{-2}$, prej ku fitojmë $x = -2$.

c) Nëse vëndojmë $\log_3 \sqrt{3} = x$, sipas përkufizimit kemi $3^x = \sqrt{3}$, përkatësisht $3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

ç) Nëse vëndojmë $\log_{\sqrt{2}} 4 = x$ kemi $(\sqrt{2})^x = 4 \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2$, përkatësisht $x=4$.

d) Vëndojmë $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$. Prej përkufizimit: $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Leftrightarrow (a^{-1})^x = a^2 \Leftrightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow -x = 2, x = -2$.

➤ **Shembulli 5.** Duke e shfrytëzuar identitetin themelor logaritmik të njehsojmë:

a) $7^{\log_7 2}$, b) $2^{1+\log_2 3}$, c) $5^{2+\log_5 2}$, ç) $3^{2-\log_3 5}$, d) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3}$.

Zgjidhje. a) $7^{\log_7 2} = 2$, b) $2^{1+\log_2 3} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$, c) $5^{2+\log_5 2} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 2} = 25 \cdot 2 = 50$,

ç) $3^{2-\log_3 5} = 3^2 \cdot 3^{-\log_3 5} = 9 \cdot \frac{1}{3^{\log_3 5}} = 9 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$, d) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 3} = (\sqrt{4})^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$.

DETYRA

1. Barazitë që vijojnë shkruaji në formë të barazive logaritmike:

a) $2^5=32$, b) $3^0=1$, c) $5^{-2}=\frac{1}{25}$, ç) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}$, d) $(\sqrt{3})^3=3$.

2. Barazitë që vijojnë shkruaji në formë të barazive eksponenciale:

a) $\log_4 64=3$, b) $\log_{10} \frac{1}{100}=-2$, c) $\log_{0.2} 25=-2$, ç) $\log_{\sqrt{3}} 9=4$, d) $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$.

3. Caktoji logaritmet: a) $\log_7 49$, b) $\log_1 125$, c) $\log_{\sqrt{2}} 16$, ç) $\log_{0.3} \frac{100}{9}$.

4. Cakto bazën e logaritmeve: a) $\log_a 64=2$, b) $\log_a 27=-3$, c) $\log_a \sqrt{2}=\frac{1}{2}$,
ç) $\log_a 2, 25=2$.

5. Cakto logaritmandin e logaritmeve: a) $\log_2 b=5$, b) $\log_{36} b=\frac{1}{2}$, c) $\log_{0.2} b=3$,
ç) $\log_{\sqrt{3}} b=4$.

6. Cakto x nëse: a) $x=5^{2+\log_5 4}$, b) $x=6^{1-\log_6 5}$.

*7. Vërteto se: a) $\log_2 (\log_2 16)=2$, b) $\log_3 (\log_2 8)=1$.

*8. Njehso: a) $\log_2 (\log_3 (\log_4 64))$, b) $\log_4 64 \cdot \log_4 16 \cdot \log_4 4 \cdot \log_3 1$.

BRIGGS, HENRI (Briggs Henry 1561-1630) – matematikan anglez, profesor në kolezhin e Londrës. Me këshillimin e matematikanti Skocez Xh. Neper është marrë me logaritmet. E ka botuar veprën *Aritmetika e logaritmeve* në të cilën jep edhe tabela me bazë 10, të njohura si logaritme dekadë ose të Briggsit.

1. 2. 2. RREGULLAT THEMELORE TË LOGARITMIZIMIT

Shprehjet algjebrike logaritmohen në bazë të këtyre rregullave.

Teorema 1. Logaritmi për bazë a ($a > 0$, $a \neq 1$), prej prodhimi të dy numrave pozitivë realë është i barabartë me shumën e logaritmeve të tyre për të njëjtën bazë, d. m. th.

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

Vërtetim. Në pajtim me identitetin themelor logaritmik për numrat x dhe y kemi:

$$x = a^{\log_a x} \text{ dhe } y = a^{\log_a y}. \quad (*)$$

Duke i shumëzuar anët përkatëse të barazisë (*), fitojmë:

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Atëherë, prej barazive $\log_a a^n = n$ dhe $\log_a a = 1$;

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y.$$

Teorema 2. Logaritmi për bazë a , ($a > 0$, $a \neq 1$), prej herësit të dy numrave pozitivë realë është i barabart me ndryshimin e logaritmeve të pjesëtueshmit dhe pjesëtuesit për bazën e njëjtë, d. m. th.:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

Vërtetim. Duke i pjesëtuar anët përkatëse të barazive (*), fitojmë:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}.$$

$$\text{Atëherë } \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a a^{\log_a x - \log_a y} = \log_a x - \log_a y. \quad \blacksquare$$

Teorema 3. Logaritmi për bazë a ($a > 0$, $a \neq 1$), prej fuqisë të numrit pozitiv real x^n , ($n \in \mathbb{R}$) është i barabartë me prodhimin e treguesit të fuqisë n dhe logaritmit për bazë a të bazës x të fuqisë, d. m. th.:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (3)$$

Vërtetimi. Në identitetin themelor logaritmik $x = a^{\log_a x}$ të dy anët i fuqizojmë në fuqinë n , pra kemi:

$$x^n = \left(a^{\log_a x} \right)^n = a^{n \log_a x}.$$

$$\text{Atëherë: } \log_a (x^n) = \log_a a^{n \log_a x} = n \log_a x. \quad \blacksquare$$

Pasoja. Logaritmi për bazë a ($a > 0$, $a \neq 1$) prej rrënjës të numrit pozitiv real është i barabartë me logaritmin për bazë a prej numrit nënrrënjësor, i pjesëtuar me treguesin e rrënjës, d. m. th.:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n} \quad (4)$$

Në shembujt që vijojnë të gjithë logaritmet në një shprehje kanë bazë të njëjtë (shpeshherë për bazë e marrin, numrin 10) dhe atë nuk do ta shkruajmë në veçanti, përveç nëse nuk është theksuar cila është baza.

➤ **Shembulli 1.** T'i logaritmojmë shprehjet:

a) $5x$, b) $\frac{4xyz}{3}$, c) $3(x+y)$, ç) $2xy^2z^3$, d) $\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$, e) $\frac{2x \cdot \sqrt[3]{y^2w}}{z^4}$.

Zgjidhje.

a) Prej (1): $\log 5x = \log 5 + \log x$,

b) Prej (2) dhe (1): $\log \frac{4xyz}{3} = \log 4 + \log x + \log y + \log z - \log 3$,

c) $\log 3(x+y) = \log 3 + \log(x+y)$,

ç) Duke i zbatuar njëpasnjë (1) dhe (3) kemi:

$$\log 2xy^2z^3 = \log 2 + \log x + \log y^2 + \log z^3 = \log 2 + \log x + 2\log y + 3\log z,$$

d) $\log \frac{x^2\sqrt{y}}{z^3} = \log x^2 + \log \sqrt{y} - \log z^3 = 2\log x + \frac{1}{2}\log y - 3\log z$,

e) $\log \frac{2x \cdot \sqrt[3]{y^2w}}{z^4} = \log 2 + \log x + \frac{2}{3}\log y + \frac{1}{3}\log w - 4\log z$.

Logaritmet shfrytëzohen në njehsime të ndryshme në matematikë dhe shkenca tjera. Gjithashtu me zbatimin e tyre thjeshtësohen shumë formula matematikore. Me logaritimizim mundemi me saktësi të madhe të njehsojmë vlera të shprehjeve numerike, edhe duhet të vërejmë se sot, me sukses, atë e bëjmë me kalkulatorët ekzistues edhe pa zbatimin e logaritmeve. Por, përsëri do të tregojmë se si njehsohet vlera e shprehjeve numerike me **logaritimizim**, ku do t'i zbatojmë edhe rregullat për logaritimizim, por do të njihemi edhe me operacionin antilogaritimizim.

Për gjetjen e logaritmit prej numrave të dhënë më parë shfrytëzoheshin tabela speciale të përpunuara, por në kohën e fundit për këtë qëllim, gjithashtu i shrytëzojmë kalkulatorët. Për shembull, të caktojmë $\log 21$, 1149. E fusim numrin 21, 1149, e shtypim tastin **log** (logaritëm me bazë 10) dhe në displej fitohet vlera 1, 324589029.

Do ta tregojmë mënyrën për gjetjen e numrit logaritmi i të cilit është dhënë, përkatësisht le të jetë dhënë se: $\log x = 1, 324589$. Mënyra e gjetjes së numrit x quhet **antilogaritimizim**, dhe i përmban këto hapa: së pari në kalkulator e fusim numrin 1, 324589, pastaj e shtypim tastin **2ndF** ose te disa kalkulator **INV** pastaj **log** dhe në displej fitohet vlera 21, 11489859 $\approx 21, 1149$, çka vëren!

➤ **Shembulli 2.** Të njehsohet: a) $x = 5, 43 \cdot 13, 57^3$, b) $x = \frac{\sqrt[3]{91,32}}{23,7^2 \cdot 4,9}$.

Zgjidhje.

a) $x = 5, 43 \cdot 13, 57^3$

$$\log x = \log(5, 43 \cdot 13, 57^3)$$

$$\log x = \log 5, 43 + \log 13, 57^3$$

$$\log x = \log 5, 43 + 3\log 13, 57$$

$$\log x = 0, 734799829 + 3 \cdot 1, 132579848$$

$$\log x = 0, 734799829 + 3, 397739543$$

$$\log x = 4, 132539372 \Rightarrow x = 13568, 73535.$$

$$b) x = \frac{\sqrt[3]{91,32}}{23,7^2 \cdot 4,9},$$

$$\log x = \frac{1}{3} \log 91,32 - (2 \cdot \log 23,7 + \log 4,9)$$

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot 1,960565903 - 2 \cdot 1,374748346 - 0,69019608$$

$$\log x = 0,653521967 - 2,749496692 - 0,69019608$$

$$\log x = 0,653521967 - 3,439692772$$

$$\log x = -2,786170805 \Rightarrow x = 0,001636172.$$

Sikurse tani më treguam shpeshherë shfrytëzohen logaritme me bazë 10, të ashtuquajtur **logaritme dekadë**. Ato shkruhen me $\log x$ në vend me $\log_{10} x$ ose shpeshherë me $\lg x$.

Tani të vërejmë një veti të logaritmeve të numrave pozitivë realë, të cilët gjithmonë mund t'i shkruajmë në të ashtuquajtur formën standarde: $x = a \cdot 10^k$, $1 \leq k < 10$, $k \in \mathbb{Z}$. Për këtë qëllim të kërkojmë logaritme (me bazë 10), për shembull prej numrave: 0,002; 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2000. (Të përkujtohem se $\lg 10 = 1$, ndërsa me kalkulator mund të caktosh se $\lg 2 = 0,30103$).

$$0,002 = 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lg 0,002 = \lg 2 \cdot 10^{-3} = \lg 2 + \lg 10^{-3} = \lg 2 - 3 \lg 10 = \lg 2 + (-3) = -3 + \lg 2 = -3 + 0,30103;$$

$$0,02 = 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \lg 0,02 = -2 + \lg 2 = -2 + 0,30103;$$

$$0,2 = 2 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \lg 0,2 = -1 + \lg 2 = -1 + 0,30103;$$

$$2 = 2 \cdot 10^0 \Rightarrow \lg 2 = 0,30103 = 0 + 0,30103;$$

$$20 = 2 \cdot 10^1 \Rightarrow \lg 20 = 1 + \lg 2 = 1 + 0,30103;$$

$$200 = 2 \cdot 10^2 \Rightarrow \lg 200 = 2 + \lg 2 = 2 + 0,30103;$$

$$2000 = 2 \cdot 10^3 \Rightarrow \lg 2000 = 3 + \lg 2 = 3 + 0,30103;$$

Prej kësaj që u tregua mund të vëresh se logaritmet e numrave çfarëdo të zgjedhur kanë një mbledhës të njëjtë 0,30103, por ndryshojnë vetëm te vlera e mbledhësit të parë, i cili është numër i plotë.

Në mënyrë të ngjashme për çfarëdo numër pozitiv real x kemi:

$$\lg x = k + \lg a,$$

poashtu numri i plotë k quhet **karakteristika**, kurse $\lg a$, quhet **mantisa** e logaritmit të numrit x dhe shënohet me m . Pasi $1 \leq a < 10$ kemi se $\lg a$ është numër jo më i vogël se 0 dhe më i vogël se 1, provo! Domethënë mundemi shkurtimisht të shkruajmë

$$\lg x = k + m, \text{ ku } x \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z}, m \in [0, 1).$$

Për gjetjen e karakteristikës të çfarëdo numër pozitiv real vlen:

1) karakteristika i logaritmit dekad të numrit x , $0 < x < 1$, është numër negativ vlera absolute e të cilit është e barabartë me zerot para shifrës së parë të x që nuk është zero.

2) Karakteristika e logaritmit dekad të numrit x , $x > 1$, është për një më i vogël se numri i shifrave të pjesës së tij të plotë.

Njehsimi i mantisë së logaritmeve të numrave është mënyrë e ndërlikuar, prandaj më parë shfrytëzoheshin të ashtuquajtura tabela logaritmike (ato ende janë në përdorim). Në logaritmet e numrave i gjejmë duke shfrytëzuar kalkulator, që sigurisht është më i thjeshtë.

DETYRA

1. Cakto (me kalkulator): a) $\lg 234, 56$; b) $\lg 78, 9$; c) $\lg 3, 987$; ç) $\lg 0, 25$; d) $\lg 0, 01357$.

2. Cakto x nëse: a) $\lg x = 0, 106099$; b) $\lg x = 1, 486$; c) $\lg x = 3, 301680949$; ç) $\lg x = -2, 468521$.

3. Njehso x nëse: a) $x = \frac{3}{4} \lg 53$; b) $x = \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}$; c) $x = \frac{2}{7} \lg 0,7 + \frac{3}{5} \lg 555$.

4. Logaritmoji shprehjet: a) $5ac$; b) $\frac{2adp}{3bc}$; c) ab^2c^3 ; ç) $c \cdot \sqrt[3]{a^5b^4}$; d) $\frac{2ab^3}{\sqrt[5]{c^2}}$.

5. Njehso vlerën e shprehjeve:

$$\text{a) } x = 235 \cdot \sqrt[3]{178}; \text{ b) } x = \sqrt{5\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}}; \text{ c) } x = \frac{27,6 \cdot \sqrt[5]{1949}}{9,05}.$$

NEPER, XHON (Napier John) (1550-1617) – matematikan skocez. Pas pajisjes me arsim solid në njërin prej universiteteve më të mirë të Skocisë, Universiteti Sh. Andreja është marrë me teologji, por edhe me matematikë. I rëndësishëm është kontributi i tij në zbulimin e logaritmeve të cilëve u kushton njëzet vjet punë të pandërprerë. Në vitin 1614, e boton veprën *Kontruksioni i ligjit për logaritme*, ku logaritmet e numrave i përkufizon në mënyrë të ngjashme me përkufizimin e sotshëm. Së bashku me matematikanin anglez H. Briggs përpilon tabela logaritmike të cilat edhe sot janë në përdorim. Në vitin 1617 e boton veprën *Njehsimi me thupra logaritmike*, në të cilën jep mënyrën gjysmautomatike për shumëzimin e numrave.

1.2.3. LIDHJET NDËRMJET LOGARITMEVE ME BAZA TË NDRYSHME

Do të tregojmë se mjafton t'i dijmë logaritmet për një bazë (shpeshherë 10) që të mund të kalojmë në logaritme me bazë tjetër. Kalimi prej logaritmit për një bazë nga logaritmi me tjetër bazë me këtë *lidhje ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme*:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a, c \neq 1$$

Vërtetim. Identiteti themelor logaritmik $a^{\log_a b} = b$ e logaritmojmë për bazë c dhe poashtu fitojmë:

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \Leftrightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Pasojë e drejtpërdrejt prej lidhjes themelore logaritmike me baza të ndryshme është kjo:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a, b \neq 1.$$

Vërtetim. Në lidhjen themelore ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme do ta zgjedhim b për bazë të re të logaritmeve:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Lidhjet ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme do t'i shfrytëzojmë në zgjidhjen e shembujve që vijojnë.

➤ **Shembulli 1.** Në mënyrë sa më të thjeshtë të njehsojmë: a) $\log_{81} 3$; b) $\log_{32} \sqrt[3]{2}$.

Zgjidhje. a) $\log_{81} 3 = \frac{1}{\log_3 81} = \frac{1}{4}$, b) $\log_{32} \sqrt[3]{2} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 32} = \frac{\frac{1}{3} \log_2 2}{\log_2 2^5} = \frac{\frac{1}{3} \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{1}{15}$.

➤ **Shembulli 2.** Të njehsojmë:

a) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 13 \cdot \log_{13} 15$, b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9$, c) $\log_7 8 \cdot \log_4 49$.

Zgjidhje.

a) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 13 \cdot \log_{13} 15 = \frac{\lg 5}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 11}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 13}{\lg 11} \cdot \frac{\lg 15}{\lg 13} = \frac{\lg 3 \cdot 5}{\lg 3} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 3} = 1 + \frac{\lg 5}{\lg 3} = 1 + \log_3 5$,

b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 2} = \frac{\lg 3^2}{\lg 3} = \frac{2 \lg 3}{\lg 3} = 2$, c) $\log_7 8 \cdot \log_4 49 = \frac{\lg 8}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 49}{\lg 4} = \frac{\lg 2^3}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 7^2}{\lg 2^2} = \frac{3 \cdot \lg 2}{\lg 7} \cdot \frac{2 \cdot \lg 7}{2 \cdot \lg 2} = 3$.

Prej lidhjes themelore ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme vijojnë këto lidhje:

a) $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$

b) $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

c) $\log_{a^k} b^k = \log_a b$

Vërtetim.

a) $\log_{a^k} b = \frac{\lg b}{\lg a^k} = \frac{\lg b}{k \lg a} = \frac{1}{k} \log_a b$, b) $\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\lg b}{\lg \frac{1}{a}} = \frac{\lg b}{\lg a^{-1}} = \frac{\lg b}{(-1) \cdot \lg a} = -\frac{\lg b}{\lg a} = -\log_a b$,

$$c) \log_a b^k = \frac{\lg b^k}{\lg a^k} = \frac{k \lg b}{k \lg a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \log_a b. \blacksquare$$

► **Shembulli 3.** Duke i shfrytëzuar lidhjet ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme, të njehsojmë: a) $\log_{\sqrt{a}} 3$, nëse $\log_a 3 = b$, b) $\log_2 \sqrt[3]{a}$, nëse $\log_a 8 = b$,

c) $\log_{\sqrt{3}} 4$, nëse $\log_{\frac{1}{2}} 3 = a$, ç) $\log_{30} 8$, nëse $\lg 5 = a$ dhe $\lg 3 = b$.

Zgjidhje.

$$a) \log_{\sqrt{a}} 3 = \log_{\frac{1}{a^2}} 3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_a 3 = 2 \log_a 3 = 2b,$$

$$b) \log_2 \sqrt[3]{a} = \log_2 a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 a = \log_2 a = \log_8 a = \frac{1}{\log_a 8} = \frac{1}{b},$$

$$c) \log_{\sqrt{3}} 4 = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 4}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}} = \frac{-\log_2 2^2}{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3} = \frac{-2}{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3} = -\frac{4}{a},$$

$$\text{ç) } \log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{\lg 2^3}{\lg 10 \cdot 3} = \frac{3 \lg 2}{\lg 10 + \lg 3} = \frac{3 \lg \frac{10}{5}}{1+b} = \frac{3(\lg 10 - \lg 5)}{1+b} = \frac{3(1-a)}{1+b}.$$

Në lidhje me logaritmet me baza të ndryshme mund ta themi edhe këtë:

Bashkësia prej logaritmeve të të gjithë numrave pozitivë realë për bazë të njëjtë a ($a > 0$, $a \neq 1$) quhet sistemi logaritmik me bazë a .

Në praktikë më së shpeshti në përdorim janë sistemet logaritmike me bazë 10 dhe me bazë e , ku numri $e = 2,71828182845 \dots$

Sistemin logaritmik të cilin e përbëjnë logaritmet me bazë 10 quhet *dekad* ose i *Briggsit*, sipas matematikanit anglez Briggs (1561-1630) i cili formoi tabela për njehsimin e tyre. Ato shkruhen me $\log x$ në vend me $\log_{10} x$, ose edhe me $\lg x$.

Sistemin logaritmik të cilin e përbëjnë logaritmet me bazë e quhet *natyror* ose i *Neperit*, sipas matematikanit skocez J. Napier (1550-1617) i cili gjithashtu ka formuar tabela për njehsimin e tyre. Në vend të $\log_e x$ ato shkruhen me $\ln x$.

DETYRA

1. Pa e shfrytëzuar kalkulatorin, njehso:

- a) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$, b) $\log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_4 9 \cdot \log_9 2 \cdot \log_3 2$, c) $\log_2 \sqrt{3} \cdot \log_9 \sqrt[3]{2}$, ç) $\frac{\log_3 5}{\log_{27} 5}$.
2. Pa e shfrytëzuar kalkulatorin, njehso: a) $\frac{\lg 25}{\lg 125}$, b) $\frac{2\log_2 6 - \log_2 3}{\log_2 144}$, c) $\frac{\log_3 64}{\log_3 48 - \log_3 6}$.
3. Shprehe: a) $\log_{25} 64$ nëpërmjet $\log_5 2$, b) $\log_8 \sqrt{27}$ nëpërmjet $\log_2 3$.
4. Sa është: a) $\log_{\sqrt{8}} a$, nëse $\log_2 a = b$, b) $\log_{49} a \sqrt[3]{a}$, nëse $\log_7 a = b$.
5. Vërteto se vlera e thyesave: a) $\frac{\log_x 7}{\log_x 17}$, b) $\frac{\log_5 x}{\log_4 x}$; nuk varet prej x ($x > 0, x \neq 1$).
6. Vërteto se: $\log_5 7 \cdot \log_6 5 \cdot \log_3 6 + 1 = \log_3 21$.
7. Vërteto se: $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} = \log_x abc$, ($a > 0, b > 0, c > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1, x \neq 1$).
8. Vërteto se: $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} = 3 \log_x a$, ($a > 0, x > 0, a \neq 1, x \neq 1$).

1.2.4. VIJIMI DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT LOGARITMIK

1. Të përkujtohem, gjatë përkufizimit të logaritmit treguam se $\log_a x$, ku $a > 0$ dhe $a \neq 1$, ka kuptim për çdo numër pozitiv real x , kurse vlera e $\log_a x = b$, mund të jetë edhe çfarëdo numër real, pasi treguesi b i fuqisë $a^b = x$, është çfarëdo numër real. Tani mund ta japim këtë:

Përkufizim. Funkzioni $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, të dhënë me $f(x) = \log_a x$, ku $a > 0$ dhe $a \neq 1$ është numër real dhe x është ndryshore e pavarur reale quhet **funksion logaritmik**.

Në bazë të përkufizimit për funksionin logaritmik $f(x) = y = \log_a x$ dhe vetive të funksionit eksponencial, si edhe lidhja që vlen prej përkufizimit për logaritëm $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, mund t'i nxjerrim këto veti për funksionin logaritmik dhe ta caktojmë kuptimin e tyre në lidhje me grafikun e të njëjtës.

1⁰. Domeni D_f (fusha e përkufizimit) për funksionin logaritmik $f(x) = \log_a x$ është bashkësia e numrave pozitivë realë, d.m.th. $D_f = \mathbf{R}^+$.

2⁰. Bashkësia V_f e vlerave të funksionit logaritmik $f(x) = \log_a x$ është çdo numër real,

d.m.th. $V_f = \mathbb{R}$.

3°. Për $x=1$, funksioni logaritmik $f(x)=\log_a x$, ka vlerë $f(1)=0$.

4°. Funksioni logaritmik $f(x)=\log_a x$, për $a>1$ **monotonisht rritet**, ndërsa për $0<a<1$ **monotonisht zvogëlohet**, në tërë domenin D_f .

Vërtetim.

Vetitë 1° dhe 2° vijnë drejtpërdrejt prej përkufizimit të funksionit logaritmik. Prej $\log_a 1=0$ vijon vetia 3°. Ndërsa vetinë 4° do ta vërtetojmë me vërtetimin e implikacionit:

a) $a>1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, d.m.th. $f(x_1) < f(x_2)$,

b) $0<a<1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, d.m.th. $f(x_1) > f(x_2)$.

a) Le të jetë $a>1$ dhe $x_1 < x_2$ dhe t'i shënojmë $\log_a x_1 = y_1$ dhe $\log_a x_2 = y_2$. Atëherë $\log_a x_1 = y_1 \Leftrightarrow a^{y_1} = x_1$ dhe $\log_a x_2 = y_2 \Leftrightarrow a^{y_2} = x_2$. Prej kushtit $x_1 < x_2$, fitojmë $a^{y_1} < a^{y_2}$. Prej këtui dhe prej vetisë së funksionit eksponencial vijon se $y_1 < y_2$, domethënë $\log_a x_1 < \log_a x_2$, përkatësisht $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Përpiku vet, vërtetohet në mënyrë analoge.

Si pasojë prej vetisë 4° nxirren edhe këto veti:

5°. Nëse $a>1$ dhe $\log_a x_1 < \log_a x_2$, atëherë $x_1 < x_2$.

6°. Nëse $0<a<1$ dhe $\log_a x_1 < \log_a x_2$, atëherë $x_1 > x_2$.

7°. Nëse $\log_a x_1 = \log_a x_2$, atëherë $x_1 = x_2$.

Vërtetim. Do ta vërtetojmë pasojën e parë, pasi dy të tjerat vërtetohen në mënyrë analoge. Le të jetë $a>1$ dhe $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Për x_1 dhe x_2 kemi këto mundësi: $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$ ose $x_1 < x_2$. Rasti i parë, $x_1 > x_2$ nuk është i mundshëm pasi atëherë prej vetisë 4° vijon $\log_a x_1 > \log_a x_2$, që është në kundërshtim me kushtin. Rasti i dytë, $x_1 = x_2$, gjithashtu nuk është i mundshëm pasi atëherë do të kemi $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Domethënë ngel vetëm $x_1 < x_2$.

➤ **Shembulli 1.** Ta caktojë fushën e përkufizimit të funksioneve:

a) $\log_2(x-3)$, b) $\log_5(4-x)$, c) $\log_3(-x)$, ç) $\log_7(x^2+4)$, d) $\log_2(1-x^2)$, e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x+1}$.

Zgjidhje. Prej vetisë 1° vijon se fusha e përkufizimit të funksioneve është:

a) $x-3>0 \Rightarrow x>3$, domethënë $D=(3, \infty)$, b) $4-x>0 \Rightarrow -x>-4 \Rightarrow x<4$, domethënë $D=(-\infty, 4)$,

c) $-x>0 \Rightarrow x<0$, domethënë $D=(-\infty, 0)$, ç) $x^2+4>0$, për çdo $x \in \mathbb{R}$, domethënë $D=(-\infty, \infty)$,

d) $1-x^2>0 \Rightarrow (1-x)(1+x)>0 \Rightarrow D=(-1, 1)$, (pse?), e) $\frac{x-2}{x+1} \Rightarrow (x-2)(x+1)>0 \Rightarrow D=(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojë monotoninë e funksioneve:

a) $y=\lg x$, b) $y=\log_{0.2} x$, c) $y=\log_5(2+x)$, ç) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, d) $y=\log_{0.3}(x-4)$, e) $y=\log_7(1+x^2)$.

Zgjidhje. Funkzionet nën a), c) dhe e) monotonisht rriten, pasi baza e logaritmit është numër më i madh se 1; ndërsa funksionet nën b), ç) dhe d) monotonisht zvogëlohen, pasi baza e logaritmit është numër ndërmjet 0 dhe 1 (vetia 4^0).

2. Grafiku i funksionit logaritmik

Tani ngel të konstruktojmë grafikun e funksionit logaritmik $f(x)=\log_a x$ në lidhje me sistemin kënddrejtë koordinativ të dhënë xOy . Grafiku i funksionit $f(x)=\log_a x$ është bashkësia e pikave $(x, \log_a x)$, $x \in R^+$, d.m.th. $G=\{(x, \log_a x), x \in R^+\}$.

Për grafikun e funksionit logaritmik $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$ sipas kësaj që është përmendur gjer më tani, kemi:

- prej vetisë 1^0 vijon se ai gjendet djathtas prej boshtit të ordinatës y .
- prej vetisë 2^0 vijon se ai gjendet edhe nën edhe mbi boshtin e abshisës x .
- prej vetisë 3^0 vijon se ai e prenë boshtin x në pikën $(1,0)$.

➤ **Shembulli 3.** Ta konstruktojmë grafikun e funksionit: $f(x)=\log_2 x$.

Zgjidhje. Për ta vizatuar grafikun së pari do ta formojmë tabelën me vlera të përshtatshme të zgjedhura të ndryshores së pavarur x dhe vlerave përkatëse për funksionin $\log_2 x$. Për shembull për $x=4$ kemi, $f(4)=\log_2 4=2$; për $x=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=-1$; për $x=3$, $f(3)$ do ta caktojmë me kalkulator,

$$f(3)=\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx \frac{0,477}{0,301} \approx 1,585, f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_2 \frac{3}{2}=\log_2 3 - \log_2 2 = 1,585 - 1 = 0,585 \text{ etj.}$$

(Për $f(5)$ provo vet!). Grafiku i funksionit $f(x)=\log_2 x$ është paraqitur në fig. 1a dhe 1b.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	0,585	1	1,585	2

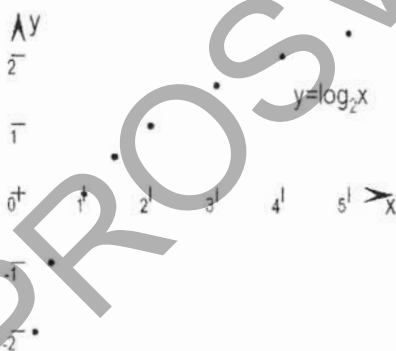


fig. 1a

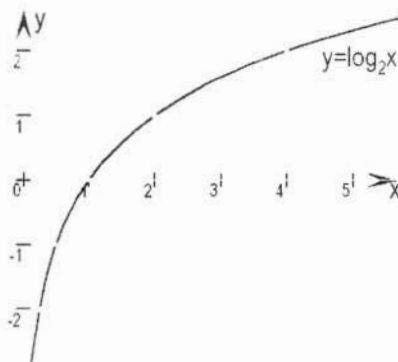


fig. 1b

➤ **Shembulli 4.** Ta konstruktojmë grafikun e funksionit: $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$.

Zgjidhje. Ngjashëm si te shembulli 1., për $x=3$, $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$. Nëse duhet të caktosh $f(2)$, $f(5)$ atë duhet ta bësh me kalkulator, por njëkohësisht do ta provosh njohurinë tënde prej rregullave për logaritimizim, kemi:

$$\text{për } x=2, f(2) = \log_{\frac{1}{3}} 2 = \frac{\lg 2}{\lg \frac{1}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 1 - \lg 3} = \frac{0,301}{0 - 0,477} = -0,631,$$

$$\text{për } x=5, f(5) = \log_{\frac{1}{3}} 5 = \frac{\lg 5}{\lg \frac{1}{3}} = \frac{\lg 5}{\lg 3^{-1}} = \frac{\lg 5}{-\lg 3} = -\frac{0,699}{0,477} \approx -1,465, \text{ etj.}$$

Për $f(4)$ provo vet! Grafiku i funksionit $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ është paraqitur në fig. 2a dhe 2b.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	2	3	5
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	-0,631	-1	-1,465

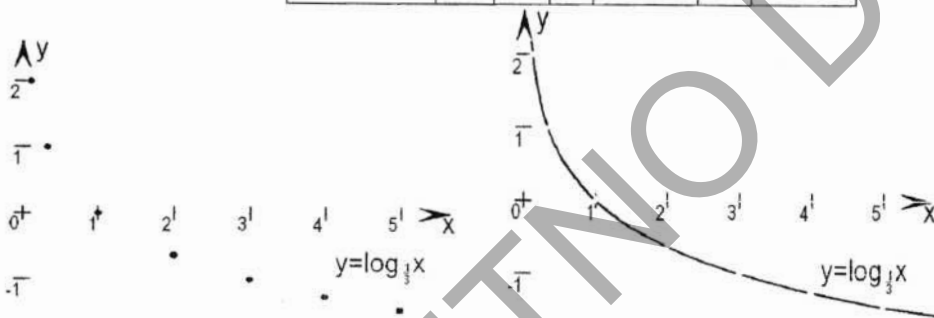


fig. 2a

fig. 2b

Prej grafikëve të funksioneve $f(x)=\log_2 x$ dhe $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ mundemi ta vërejmë se i pari afrohet deri te pjesa negative, kurse tjetri deri te pjesa pozitive e boshtit Oy , i cili asnjëherë nuk e prenë. Vijon, boshti Oy është asimptotë e lakoreve, grafikët e funksioneve të shqyrtuar $f(x)=\log_2 x$ dhe $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

>Shembulli 5. Në të njëjtin sistem koordinativ t'i vizatojmë grafikët e funksioneve:

a) $y=\log_3 x$ dhe $y=-\log_3 x$; b) $y=\log_2 x$ dhe $y=\log_2(-x)$.

Zgjidhje. Së pari të vërejmë se prej lidhjeve ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme vlen: $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$. Domethënë me vizatimin e grafikut të funksionit $y=-\log_3 x$, ne në realitet e vizatojmë grafikun e funksionit $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

Grafikët e funksioneve nën a) dhe b) janë paraqitur në fig. 3 dhe fig. 4 përkatësisht (tabelat me vlera përpiloji vet!). Poashtu mund të vëresh simetrinë e grafikëve $y=\log_3 x$ dhe $y=-\log_3 x$ në lidhje me boshtin x , kurse në rastin e dytë nën b) simetria e grafikëve të funksioneve $y=\log_2 x$ dhe $y=\log_2(-x)$ në lidhje me boshtin y .

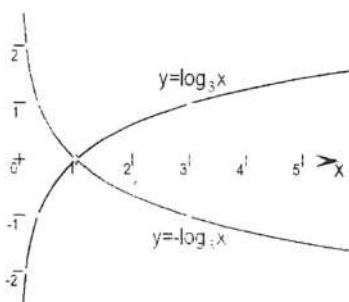


fig. 3

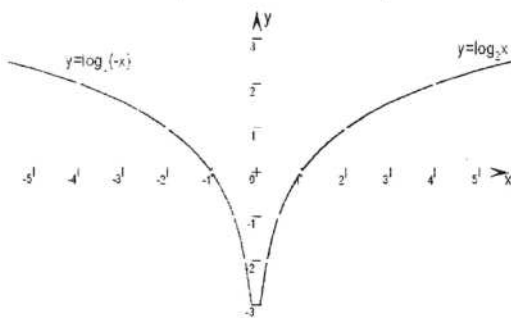


fig. 4

➤ **Shembulli 6.** Ta vizatojmë grafikun e funksionit: $y = \log_2(x+1) - 2$.

Zgjidhje. Ngjashëm sikurse te funksionet eksponenciale, së pari e vizatojmë grafikun e funksionit $y = \log_2 x$. Pastaj grafikun e funksionit $y = \log_2(x+1)$, i cili është fituar prej grafikut të funksionit $y = \log_2 x$, me translacion për një njësi në kahen negative të boshtit x (domethënë majtas). Grafiku i funksionit të kërkuar $y = \log_2(x+1) - 2$ është fituar prej grafikut të funksionit $y = \log_2(x+1)$ me translacion për dy njësi në kahen negative të boshtit y (domethënë poshtë). Të gjithë grafikët e përmendur janë paraqitur në fig. 5.

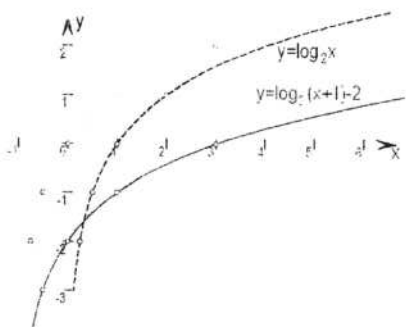


fig. 5

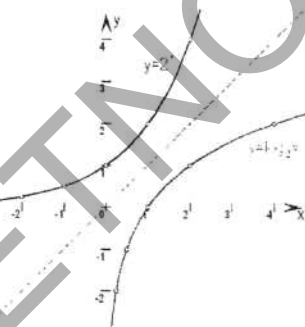


fig. 6

Prej përkufizimit për logaritëm e vërejmë lidhjen ndërmjet atij dhe fuqisë të e cila e panjohura është në tregues. Tani të vërejmë çka ndodh me grafikët e funksionit logaritmik $y = \log_a x$ dhe funksionit eksponencial $y = a^x$.

➤ **Shembulli 7.** Në të njëjtin sistem koordinativ t'i vizatojmë grafikët e funksioneve:

$$y = \log_2 x \text{ dhe } y = 2^x.$$

Zgjidhje. Grafikët e funksioneve lehtë do t'i vizatojmë. Ato këtu janë paraqitur në fig. 6 dhe mund të vërehet se janë simetrik në lidhje me drejtëzën $y = x$ (simetralja e kuadrantit të parë dhe të tretë). Këtë veti e kanë të ashtuquajturat funksionet reciprokisht inverse me të cilën do të njihesh në të mësuarit e mëtutjeshëm të matematikës, domethënë ka edhe shumë njohuri të reja me të cilat duhet të pajisesh.

DETYRA

1. Cakto fushën e përkufizimit të funksioneve: a) $y=\log_2(x-1)$, b) $y=\log_{0.5}(2-x)$,
c) $y=\log_7(x^2+3)$, ç) $y=\log_3 \frac{x+1}{x-2}$.
2. Cakto monotoninë e funksioneve; a) $y=\log_3 x$, b) $y=-\log_3 x$, c) $y=\log_{0.5}(x+1)$, ç) $y=\ln x$.
3. Duke i shfrytëzuar vetitë e funksionit logaritmik, cakto cili numër është më i madh:
a) $\ln 3$ ose $\ln 5$, b) $\log_3 1$ ose $\log_3 3$, c) $\log_5 \pi$ ose $\log_5 \sqrt{5}$, d) $\log_{0.5} \frac{1}{5}$ ose $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.
4. Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e funksioneve: $y=\log_2 x$, $y=\ln x$ dhe $y=\log_3 x$. Çka vëren?
5. Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e funksioneve: $y=\log_{10} x$ dhe $y=\log_{0.1} x$. Çka vëren?
6. Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikët e funksioneve: $y=\log_3 x$ dhe $y=\log_3(-x)$. Çka vëren?
7. Me ndihmën e grafikut të funksionit $y=\log_2 x$, në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e funksioneve: $y=\log_2 x - 1$ dhe $y=\log_2 x + 3$.

Vizatoji grafikët e funksioneve:

*8. $y=1-\log_2 x$. *9. $y=-\log_{\frac{1}{3}} x + 2$. *10. $y=\log_2(-x-1)+1$.

11. Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e funksioneve:

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dhe $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. Çka vëren?

1.2.5. BARAZIMET LOGARITMIKE

Përkufizimi. Barazimi të i cili e panjohura gjendet në logaritmand ose në bazën e logaritmit të paktën në një logaritëm quhet **barazim logaritmik**.

Për shembull barazimet: $\log_5 x=2$, $\log_x 25=2$, $\lg(x+2)=3$, $\log_3 3+\log_3 x=2$, $\lg(x+2)+\lg(x-1)=\lg 4$.

Barazimet logaritmike, njëjtë sikurse edhe barazimet eksponenciale, do t'i shqyrtojmë vetëm në bashkësinë e numrave realë. Metodë e përgjithshme për zgjidhjen e tyre nuk ekziston, megjithatë disa lloje të barazimeve logaritmike mund t'i zgjidhim me metoda elementare, duke shfrytëzuar përkufizimin për logaritëm, rregullat për logaritmizim dhe vetitë e funksionit logaritmik.

1. Barazimi logaritmik i formës: $\log_a x=b$, $a>0$, $a\neq 1$, ku $a, b \in \mathbb{R}$, ka zgjidhje të vetme $x=a^b$. Ngjashëm zgjidhen edhe barazimet logaritmike të formës: $\log_a f(x)=b$ dhe $\log_{f(x)} c=b$.

➤ **Shembulli 1.** T'i zgjidhim barazimet:

a) $\log_5 x=2$, b) $\lg(x+2)=3$, c) $\log_2(x^2-1)=3$, ç) $\log_x 25=2$.

Zgjidhje.

a) $\log_5 x=2 \Leftrightarrow x=5^2 \Rightarrow x=25$,

$$b) \lg(x+2) = 3 \Leftrightarrow x+2 = 10^3 \Rightarrow x = 998,$$

$$c) \log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2-1 = 2^3 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3.$$

c) $\log_x 25 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 5$, prej të cilëve vetëm $x_2=5$, i kënaq kushtet e bazës së logaritmit të jetë më e madhe se 0 dhe e ndryshme prej 1.

2. Barazimi logaritmik i cili me ndihmën e disa transformimeve identike mund të sillet në formën: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, është ekuivalent me baraziin $f(x) = g(x)$, ku $f(x) > 0$ dhe $g(x) > 0$.

➤ **Shembulli 2.** T'i zgjidhim barazimet:

$$a) \lg 2 + \lg x = 1, b) \log_2 x + \log_2(x+1) = 1, c) \lg(x-3) - \lg(x-7) = \lg 5.$$

Zgjidhje.

$$a) \lg 2 + \lg x = 1 \Leftrightarrow \lg 2 \cdot x = \lg 10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5.$$

$$b) \log_2 x + \log_2(x+1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot (x+1) = \log_2 2 \Leftrightarrow x \cdot (x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 1,$$

prej të cilave vetëm $x_2 = 1$ është zgjidhje, (pse!).

$$c) \lg(x-3) - \lg(x-7) = \lg 5 \Leftrightarrow \lg \frac{x-3}{x-7} = \lg 5 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-7} = 5 \Leftrightarrow x-3 = 5x-35 \Rightarrow x = 8. \text{ Kjo është zgjidhje e}$$

barazimit të dhënë pasi i kënaq kufizimet për x (përgjigju cilat!).

3. Barazimi logaritmik i formës $F[\log_a f(x)] = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, me zëvendësimin $\log_a f(x) = y$ sillet në barazimin $F[y] = 0$. Nëse zgjidhjet e këtij barazimi janë y_i ($i=1,2,\dots$), atëherë zgjidhja e barazimit $F[\log_a f(x)] = 0$ sillet në zgjidhjen e bashkësisë së barazimeve: $\log_a f(x) = y_i$ ($i=1,2,\dots$).

➤ **Shembulli 3.** T'i zgjidhim barazimet:

$$a) \lg^2 x - 7\lg x + 10 = 0, \quad b) 5\lg x + \frac{2}{\lg x} = 7, \quad c) \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1.$$

Zgjidhje.

a) Barazimi $\lg^2 x - 7\lg x + 10 = 0$, me zëvendësimin $\lg x = y$ sillet në barazim katror: $y^2 - 7y + 10 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1 = 5$, $y_2 = 2$. Atëherë prej $\lg x = 5$ fitojmë $x_1 = 10^5$, kurse prej $\lg x = 2$ fitojmë $x_2 = 100$.

b) Barazimi $5\lg x + \frac{2}{\lg x} = 7$, me zëvendësimin $\lg x = y$ sillet në barazim katror: $5y + \frac{2}{y} = 7 \Leftrightarrow 5y^2 - 7y + 2 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{2}{5}$. Atëherë prej $\lg x = 1$ fitojmë $x_1 = 10$ kurse prej $\lg x = \frac{2}{5}$ fitojmë $x_2 = \sqrt[5]{100}$.

c) Prej $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$, me zëvendësimin $\lg x = y$ fitohet barazimi: $\frac{1}{5 - y} + \frac{2}{1 + y} = 1 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1 = 3$, $y_2 = 2$. Atëherë prej $\lg x = 3$ fitojmë $x_1 = 1000$, kurse prej $\lg x = 2$, $x_2 = 100$.

➤ **Shembulli 4.** T'i zgjidhim barazimet:

$$a) \log_3 3 + \log_3 x = 2, b) \log_2 x + \log_4 x = 6, c) \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 3.$$

Zgjidhje.

$$a) \log_3 3 + \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + y = 2 \text{ (zëvendësimi } y = \log_3 x) \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1,$$

domethënë $\log_3 x = 1$, prej këtu $x = 3$.

$$b) \log_2 x + \log_4 x = 6 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_2 x = 6 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16.$$

$$c) \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 3 \Leftrightarrow \frac{\lg x}{\lg 2} \cdot \frac{\lg x}{\lg 3} = \frac{\lg 3}{\lg 2} \Leftrightarrow (\lg x)^2 = (\lg 3)^2 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}. \text{ (Provoji zgjidhjet!)}$$

4. Barazime të cilat zgjidhen me logaritimizim paraprak të të dy anëve të barazimit.

➤ **Shembulli 5.** Ta zgjidhim barazimin logaritmik: $x^{3-\log x} = 100$.

Zgjidhje. Me logaritimizimin e të dy anëve të barazimit $x^{3-\log x} = 100$, ai sillet në barazimin: $\lg x^{3-\lg x} = \lg 100 \Leftrightarrow (3 - \lg x) \lg x = 2 \Leftrightarrow (\lg x)^2 - 3 \lg x + 2 = 0 \Rightarrow \lg x = 1, \lg x = 2$. Domethënë

zgjidhjet e barazimit të dhënë janë $x_1 = 10, x_2 = 100$.

Me metodën e logaritimizimit zgjidhen edhe disa barazime eksponenciale.

➤ Për shembull barazimin: $4^x = 3$ prej 1.1.2 tani mund ta zgjidhim me logaritimizimin e të dy anëve të tij.

$$\textbf{Zgjidhje.} \lg 4^x = \lg 3 \Leftrightarrow x \lg 4 = \lg 3 \Rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 4} = \frac{0,477}{0,602} = 0,792.$$

➤ Interesant është edhe barazimi: $x^{x+1} = x$.

Zgjidhje. Me logaritimizimin e të dy anëve të tij fitojmë:

$$\lg x^{x+1} = \lg x \Leftrightarrow (x+1) \lg x = \lg x \Leftrightarrow (x+1) \lg x - \lg x = 0 \Leftrightarrow x \lg x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ dhe } \lg x = 0, \text{ prej ku zgjidhje të barazimit të dhënë janë } x_1 = 0 \text{ dhe } x_2 = 1.$$

DETYRA

Zgjidhi barazimet logaritmike:

1. a) $\log_3 x = 2$, b) $\log_7 (3x - 5) = 2$;

2. a) $\log_x 64 = 3$, b) $\log_x (x^2 - 2x + 4) = 2$;

3. a) $\lg (x + 8) - \lg (x - 2) = \lg 2$, b) $\lg (x - 3) + \lg x = 1$;

4. a) $\lg^2 x = 2 + \lg x$, b) $(1 - 2 \lg x)(2 - \lg x) + 1 = 0$,

5. a) $\lg x^4 - \frac{30}{\lg x} = 2$, b) $\frac{2}{2 + \lg x} + \frac{1}{4 - \lg x} = 1$;

6. a) $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = 3$, b) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$.

7. Zgjidhi barazimet me logaritimizimin e të dy anëve:

a) $5^{x+1} = 2$, b) $x^x = x$, c) $x^{\lg x} = 10$.

*8. Zgjidhe barazimin: $\log_2 (4^x + 4) = x + \log_2 (2^{x-1} - 3)$.

1. DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Njehso: a) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$; b) $a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}$; c) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^2 : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}}$.

2. Vizato grafikun e funksioneve: a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; b) $y = 2 - 2^{x+1}$.

Zgjidhi barazimet eksponenciale:

3. a) $2^{x-3} = 8^{x+1}$; b) $2^{2x-3} = 4\sqrt{2}$; c) $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x$.

4. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1-x} = 0,6$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{64}{27}$.

5. a) $5^{2x-3} = 25^x - 3x-1$; b) $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$.

6. a) $3^x + 3^{x+1} = 108$; b) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.

7. a) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$; b) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$.

8. a) $27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} + 3 = 0$; b) $5 \cdot \sqrt[3]{64} - 7 \cdot \sqrt[3]{8} - 6 = 0$.

9. Njehso:

a) $25^{-\frac{1}{4}\log_5 36}$; $(0,25)^{\frac{1}{4}\log_9 9}$; $49^{-0,25\log_7 9}$;

b) $\sqrt{3^{4\log_9 5}}$; $8^{\log_4 5 \cdot \log_5 4}$.

10. Njehso:

a) $\log_2 11 - \log_2 44$; $\log_{0,3} 9 - 2 \log_{0,3} 10$; $\log_8 16 + \log_{\frac{1}{3}} 3$;

b) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$; $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$; $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3}$.

c) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$; $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.

11. Vizato grafikun e funksioneve: a) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$; b) $y = 1 - \log_3(x+2)$.

Zgjidhi barazimet logaritmike:

12. a) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} x) = -1$; b) $\log_7(\log_3(\log_2(\log_2 x))) = 0$.

13. a) $\log_{x-2}(x^3 - 56) = 3$; b) $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3$.

14. a) $\lg(x+2) + \lg(x-1) = \lg 4$; b) $\lg(x+1) = \lg 6 - \lg x$.

15. a) $\lg^2 x = 2 + \lg x$; b) $\frac{1}{\lg x} = 2 + \lg \frac{1}{x}$.

16. a) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5$; b) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

17. a) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$; b) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

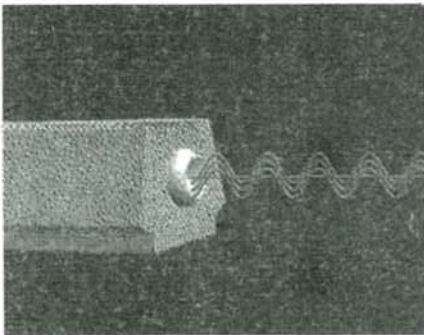
Zgjidhi barazimet:

18. a) $5^{\log_2 x} = 25$; b) $\sqrt{5^{\log_2 4}} = \log_3 x$.

19. a) $x^2 - x - x^{\log_x 6} = 0$; b) $2^{2\log_2 x} - x = 6$.

20. $2^{2+\lg x} + 2^{\lg x} = 20$.

NATYRA. JETA. MATEMATIKA.



Laseri



Oscilimet me zë

- A e dini ndryshimin ndërmjet laserit dhe maserit (jo „maser’’)?

Që të dy janë vegla relativisht të reja, laseri është zbuluar në vitin 1960., disa vjet pas konstruimit të maserit në vitin 1954. Principi i veprimit të të dy veglave, maserit dhe laserit është i njëjtë. Ato janë vegla kuantore elektronike të cilët bazohen në emisionin stimulantiv të rrezatimit elektromagnetik dhe dallohen vetëm sipas frekuencave të të përforsimit, përkatësisht të gjenerimit të valëve me të cilat operohet, Maserët punojnë në diapazonin e rrezatimit mikrovalor (microwave), ndërsa laserët janë gjenerator të valëve nga pjesa e pasme e spektrit të rrezatimit elektromagnetik, valëve optike (light).

- Çfarë është lidhja me matematikën në përgjithësi lidhja ndërmjet fizikës dhe matematikës?

E madhe, e shthurur, sikurse në të kaluarën ashtu edhe sot. Rrezatimi elektromagnetik, valët elektromagnetike, të përmendura të maserit dhe laserit në hyrje, janë ndryshime periodike të fushës elektromagnetike e shkaktuar me oscilime (lëvizja e nxituar) e thërmijave të elektrizuara.

Oscilimi përshkruhet me aparatën matematikë të cilin është në bazën e përmbajtjeve të temës që vijon. Që edhe një shembull të oscilimeve mekanike, për të cilin mendojmë se do ta kuptosh pas të mësuarit e kësaj teme nëse je mjaft i durueshëm dhe thellohesh në të, sikurse edhe duhet në edukim dhe shkencë. Me konceptet e reja që do t'i hasish në të do të njihesh së shpejti, por me siguri do të ngelin edhe punë të cilat do të duhet t'i mësosh më vonë.

Shembull: Pika materiale me masë $m = 5\text{g}$, kryen oscilime harmonike me amplitudë $A = 3\text{cm}$ dhe frekuencë $f = 0,5\text{ s}^{-1}$. Ta caktojmë shpejtësinë e pikës kur ajo gjendet në largësi $y = 1,5\text{ cm}$ prej pozitës barspeshore.

Zgjidhje: Barazimi i lëvizjes harmonike osciluese është: $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. (1)

Barazimi i shpejtësisë së pikës është: $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$. (2)

(Shenjat e përdorura janë marrë nga fizika: y - zhvendosja e trupit në momentin e dhënë të kohës t , A - amplituda, ω -frekuenca rrethore, φ_0 - faza fillestare, $\omega t + \varphi_0$ - faza e oscilimeve).

Kemi: $m = 5\text{g} = 5 \cdot 10^{-3}\text{ kg}$; $A = 3\text{cm} = 3 \cdot 10^{-2}\text{ m}$; $f = 0,5\text{ s}^{-1}$; $y = 1,5\text{ cm} = 1,5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$.

Nëse i kuadrojmë dhe pastaj i mbledhim barazimet (1) dhe (2) fitojmë: $\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1$.

Pasi $\omega = 2\pi f$, kemi: $\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{4A^2\pi^2 f^2} = 1$, prej ku për shpejtësinë v fitojmë: $v = \pm 2\pi f \sqrt{A^2 - y^2}$.

Në largësi $y = 1,5\text{cm}$ prej pozitës barspeshore, shpejtësia e pikës do të jetë:

$$v = \pm 8,2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

TRIGONOMETRIA

2.1. FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI

Vitin e kaluar shkollor u njohëm me konceptin funksion trigonometrik prej këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë. Tani do të njihemi dhe do t'i mësojmë vetitë e funksioneve trigonometrike për të cilin argumenti është çfarëdo kënd, kënd i orientuar ose numër real. Për atë qëllim së pari do ta zgjerojmë konceptin për kënd.

2.1.1. ZGJERIMI I KONCEPTIT PËR KËND. MATAJA E KËNDIT

Sipas përkufizimit të këndit, me të cilin je njohur gjer më tani, madhësia e këndit të matur në shkallë mund të jetë më së paku 0° kurse më së shumti 360° , edhe në radianë më së paku 0 kurse më së shumti 2π radianë. Kjo do të thotë se nuk mund të operojmë me kënde më të mëdhej se këndi i plotë. Por gjatë mbledhjes ose gjatë shumëzimit të këndit me numër fitojmë kënde me matje më të madhe se 360° (2π radianë), kurse nëse prej këndit më të vogël zbresim kënd më të madh fitojmë kënd matja e të cilit është shprehur me numër negativ të shkallëve ose radianëve.

Për shembull, $330^\circ + 320^\circ = 650^\circ$, $4 \cdot 270^\circ = 1180^\circ$, $60^\circ - 80^\circ = -20^\circ$, etj.

Për nevojat e trigonometrisë, fizikës, mekanikës dhe shkencave tjera, duhet t'i përcaktojmë edhe këndet e këtillë. Këtë do ta bëjmë ashtu që së pari do ta fusim konceptin *kënd i orientuar*, kurse pastaj edhe *këndin e përgjithësuar*.

1. Këndi i orientuar. Në fig.1 është paraqitur kënd me kulm O dhe krahë OA dhe OB . Këtë kënd mund ta fitojmë nëse njërin prej krahëve të tij OA ose OB e rrotullojmë rreth kulmit O deri sa të puthitet me krahun tjetër.

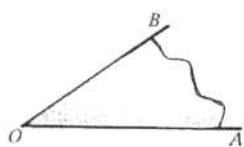


fig.1

Nëse prej të dy kaheve të mundshme të rrotullimit njërën e zgjedhim për *kahe pozitive*, tjetra është *negative*. Zakonisht, për kahe pozitive të rrotullimit e zgjedhim kahun që është e kundërt e rrotullimit të akrepave të orës (e vendosur me anën e përparme përballë nesh).

Përkufizimi 1. *Këndi i orientuar* paraqet pjesë prej rrafshit që e përshkruan gjysmëdrejtëza e dhënë me rrotullimin rreth pikës së fillimit prej ndonjë pozite fillestare, i marrur si krah i parë i këndit, deri te pozita e fundit, i marrur si krah i dytë i këndit.

Nëse rrotullimi është në kahun pozitive fitojmë **kënd pozitivisht i orientuar** (shkurtimisht: **kënd pozitiv**), kurse nëse rrotullimi është në kahun negative fitojmë **kënd negativisht i orientuar** (shkurtimisht: **kënd negativ**).

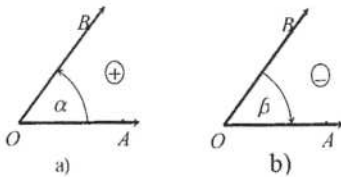


fig.2

Gjatë paraqitjes gjeometrike të këndeve të orientuar kahjen e këndit e shënojmë me shigjetë në fund të harkut me të cilin e shënojmë këndin.

Për shembull, këndi α në fig.2a është kënd pozitivisht i orientuar me krahun e fillimit OA dhe të mbarimit OB , kurse këndi β në fig.2b është kënd negativisht i orientuar me krahun e fillimit OB dhe të mbarimit OA .

Gjatë të shënuarit e këndeve të orientuar krahun fillestar e vëdojmë në vendin e parë, kurse krahun e mbarimit në vendin e dytë. Për shembull, për këndet në fig. 2 shkruajmë: $\alpha \angle(OA,OB)$ dhe $\beta \angle(OB,OA)$.

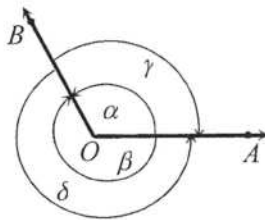


fig.3

Sigurisht tani më edhe vet vërejte se, me një pozitë të njëjtë të krahëve janë përcaktuar më shumë kënde të orientuar.

Për shembull, për pozitën e dhënë të krahëve OA dhe OB në fig. 3 janë përcaktuar 4 kënde të orientuar: dy pozitive (α dhe β) dhe dy negative (β dhe γ).

Përkufizimi 2. Këndet e orientuar që kanë krah të njëjtë të fillimit dhe të mbarimit do t'i quajmë **kënde të përmbaaruar**.

Në fig.3 kënde të përmbaaruar janë: α me β , kurse γ me δ .

2. Matja e këndeve të orientuar. Vifin e kaluar shkollor u njohe me njësitë matëse për matjen e këndeve: **shkalla** dhe **radiani** dhe me relacionin që i lidh këto dy njësi matëse. Do të bëjmë vetëm një përkujtim të shkurtër.

Një radian (1rad) është njësia e këndit krahët e të cilit prej çfarëdo vije rrethore me qendër në kulmin e këndit prejnjë harqe gjatësia e të cilëve është e barabartë me rrezen e vijës rrethore (fig. 5).

Një shkallë këndore (1°) është masa e këndit i cili është $\frac{1}{360}$ e këndit të plotë.

Në vijën rrethore me rreze r , të këndit qëndror prej θ radian i përgjigjet harku $l = \theta \cdot r$, kurse njësia radiale e këndit qëndror i cili i përgjigjet harkut rrethor me gjatësi l është $\alpha = \frac{l}{r}$

Kalimi prej një njësie këndore në tjetrën realizohet me formulat

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0174 \text{ rad}; \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''; \quad 1' = \left(\frac{1}{60} \right)^\circ \approx 0,00029 \text{ rad}.$$

Nëse njësia radiale e këndit është θ kurse njësia shkallore është α , atëherë

$$\theta = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \quad \text{dhe} \quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \theta.$$

Me ndihmën e këtyre formulave e përpilojmë këtë tabelë për shprehjen e disa këndeve në shkallë dhe radian (mirë është t'i mbash në mend):

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

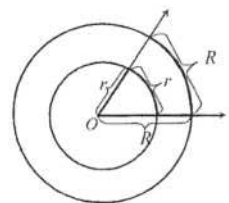


fig.4

Këndet e orientuar i masim me të njëjta njësi matëse sikurse edhe të pa orientuarit, me shkallë dhe radian, ku numri matës për këndet pozitive është numër pozitiv, kurse për këndet negativ është numër negativ. Për shembull, me $\alpha = +45^\circ$ (në radian $\alpha = +\frac{\pi}{4}$), do ta shënojmë këndin madhësia e të cilit është 45° dhe është pozitivisht i orientuar, kurse $\beta = -45^\circ$ (në radian $\beta = -\frac{\pi}{4}$) është kënd me madhësi 45° , por negativisht i orientuar.

Më së shpeshti, nëse këndi është pozitiv, e lëshojmë shenjën „+”.

Nëse krahu ngel në pozitën fillestare pa bërë ndonjë rrotullim fitojmë **zero kënd** me madhësi 0° (ose 0 rad.) (fig.5a). Këndi zero është i vetmi kënd i cili nuk ka orientim.

Nëse krahu fillestar e rrotullojmë rreth O në „+” kahen deri sa të puthitet me pozitën fillestare fitojmë **kënd të plotë** me madhësi $+360^\circ$ ($+2\pi$) (fig.5b) dhe kënd i plotë me madhësi -360° (-2π), nëse rrotullimi është në „-” kahja (fig.5c).

Këndi i orientuar në të cilin krahu fillestar dhe i mbarimit formojnë drejtëz është **kënd shtimtar** me madhësi $+180^\circ$ (fig.5ç) ose -180° (fig.5d)

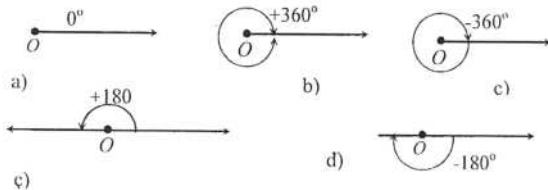


fig.5

Përkufizimi 3. Dy kënde të orientuar janë të barabartë nëse kanë madhësi të barabartë dhe janë me orientim të njëjtë.

Këndet $\alpha \angle(OA, OB)$ dhe $\beta \angle(OB, OA)$ në fig.6 janë me madhësi të barabarta por me kahe të kundërt, dhe ata nuk janë të barabartë. Për këndet e këtillë themi se janë me **orientim të kundërt** dhe shkruajmë

$$\angle(OA, OB) = \square\square \angle(OB, OA).$$

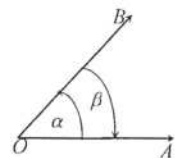


fig.6

3. Operacionet me këndet e orientuar. Shumën $\alpha + \beta$ e këndeve të orientuar α dhe β e caktojmë me mënyrën e njëjtë sikurse me këndet e paorientuar: në krahu e mbarimit të këndit α , si krahu fillestar për β , e lidhim këndin β . Megjithatë janë të mundshme këto raste:

- α dhe β janë të dy pozitive (fig. 7a) ose që të dy kënde negativë (fig. 7b);
- α është pozitiv, β është negativ dhe poashtu $|\alpha| > |\beta|$ (fig.7c).
- α është pozitiv, β është negativ dhe poashtu $|\alpha| < |\beta|$ (fig.7ç).

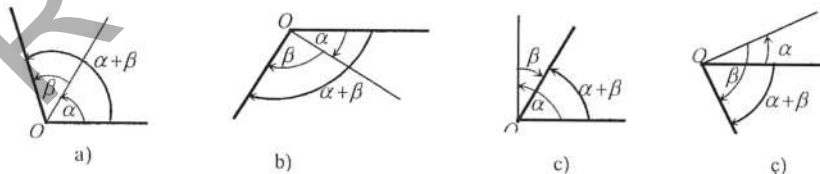


fig. 6

- **Shembulli 1.** Ta caktojmë shumën $\alpha + \beta$ për këndet: a) $\alpha = +60^\circ, \beta = +50^\circ$;
b) $\alpha = -45^\circ, \beta = -60^\circ$; c) $\alpha = +90^\circ, \beta = -30^\circ$; ç) $\alpha = +30^\circ, \beta = -90^\circ$;
Zgjidhje. a) $60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$ (fig.7a); b) $(-45^\circ) + (-60^\circ) = -105^\circ$ (fig.7b);
c) $90^\circ + (-30^\circ) = 60^\circ$ (fig.7c); ç) $30^\circ + (-90^\circ) = -60^\circ$ (fig.7ç) ■

Ndryshimin $\alpha - \beta$ të këndeve të orientuara α dhe β e caktojmë si shumë të këndit α me këndin e kundërt të β , d.m.th. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ (fig. 8).

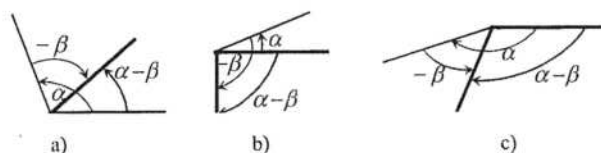


fig. 8

► **Shembulli 2.** Ta caktojmë ndryshimin $\alpha - \beta$

për këndet: a) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 70^\circ$;

b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$; c) $\alpha = -160^\circ$, $\beta = -50^\circ$

Zgjidhje. a) $120^\circ - 70^\circ = 120^\circ + (-70^\circ) = 50^\circ$ (fig. 8a)

b) $30^\circ - 120^\circ = -90^\circ$ (fig. 8b);

c) $-160^\circ - (-50^\circ) = -110^\circ$ (fig. 8c) ■

Prodhiimi $k\alpha$ i këndit të orientuar α me numrin $k \in \mathbb{R}$ është kënd madhësia e të cilit është $|k| \cdot |\alpha|$, dhe ka orientim të njëjtë me α nëse është $k > 0$, por është me orientim të kundërt prej α nëse është $k < 0$ (fig. 9).

► **Shembulli 3.** T'i caktojmë prodhimet:

a) $3 \cdot 45^\circ$; b) $3 \cdot (-45^\circ)$; c) $(-3) \cdot (-45^\circ)$.

Zgjidhje. a) $3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$ (fig. 9a);

b) $3 \cdot (-45^\circ) = -135^\circ$ (fig. 9b);

c) $(-3) \cdot (-45^\circ) = 135^\circ$ (fig. 9c) ■

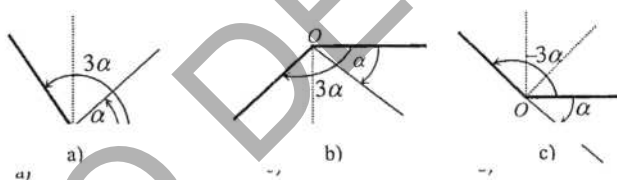


fig. 9

4. Këndi i përgjithësuar. Do të bëjmë edhe një përgjithësim të konceptit kënd ashtu që, përveç rrotullimit të krahut fillestar që e bën deri sa të puthitet me krahun e mbarimit, do t'i masim edhe rrotullimet e krahut fillestar më të mëdhenj se një rrotullim i plotë.

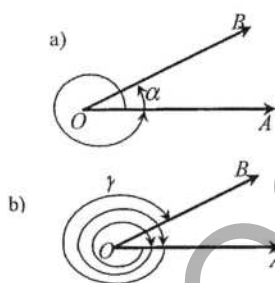


fig. 10

Nëse gjysmëdrejtëza OA bën, për shembull, një rrotullim të plotë rreth O në kahen pozitive, por pastaj të përshkruan kënd α më të vogël se këndi i plotë, e fitojmë këndin $\angle(OA, OB) = 360^\circ + \alpha$, (fig. 10a)

Nëse, gjatë pozitës së njëjtë të krahut fillestar dhe të mbarimit, krahu OA për tu puthitur me krahun OB bën, për shembull, dy rrotullime të plota në kahen negative, por pastaj edhe këndi γ në kahen negative, i cili është pjesë e rrotullimit të plotë, e fitojmë këndin $\angle(OA, OB) = -2 \cdot 360^\circ + \gamma$, $-360^\circ < \gamma < 0^\circ$ (fig. 10b)

Përkufizimi 4. Këndi numri matës i të cilit sipas vlerës absolute është në intervalin $[0^\circ, 360^\circ)$ (në shkallë) ose $[0, 2\pi)$ (në radianë), e quajmë **kënd elementar**.

Me krahun e dhënë fillestar dhe të mbarimit këndi nuk është përcaktuar njëvlerësisht, por ekziston bashkësi e pafundme e këndeve ku krahu fillestar dhe i mbarimit janë në të njëjtën pozitë. Të gjithë ata kënde dallohen njëri prej tjetrit për numër të plotë të rrotullimeve (pozitive dhe negative).

Përkufizimi 5. Këndi për të cilin janë dhënë krahu fillestar dhe i mbarimit dhe është dhënë numri dhe kahja e rrotullimeve të plota që duhet t'i bën krahu fillestar që të puthitet me krahun e mbarimit e quajmë **kënd të përgjithësuar**.

Prej përkufizimit vijon: numri matës i këndit të përgjithësuar është

$$\alpha + k \cdot 360^\circ \text{ (në shkallë) ose } \alpha + 2k\pi \text{ (në radianë)}, k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

ku k është numri i rrotullimeve të plota në „+” ose „-”, kurse α është kënd elementar.

➤ **Shembulli 4.** T'i shkruajmë në formë të

(1) këndet: a) 840° ; b) -960°

Zgjidhje. Kemi: a) $840^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 120^\circ$

$$\text{b) } -960^\circ = (-2) \cdot$$

$$360^\circ - 240^\circ \text{ ose}$$

$$-960^\circ = (-3) \cdot 360^\circ + 120^\circ$$

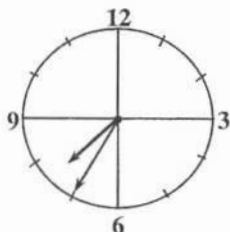


fig.11

➤ **Shembulli 5.** Ta paraqesim në formë të (1)

$$\text{këndin } \beta = \frac{37\pi}{5}.$$

$$\text{Zgjidhje. } \frac{37\pi}{5} = \frac{30\pi + 7\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} + 3 \cdot 2\pi.$$

➤ **Shembulli 6.** Nëse shigjetat e orës tregojnë orën 7 dhe 35 minuta në mëngjes, çfarë këndi do të përshkruan shigjeta e minutave kur do të tregojë orën 3 pasdite.

Zgjidhje. Që ora të tregojë orën 8 në mëngjes shigjeta e madhe duhet

të rrotullohet për 150° (fig.10). Pasi prej 8 deri në ora 3 pasdite (ora 15) duhet

të kalojnë 7 orë, shigjeta e madhe duhet të bënë 7 rrotullime të plota (në kahen negative). Vijon, shigjeta e madhe do të përshkruan kënd $-150^\circ + (-7) \cdot 360^\circ = -2670^\circ$.

Mendo! Çfarë këndi do të përshkruan shigjeta e orës.

DETYRA

1. Caktoje dhe grafikisht paraqite shumën $\alpha + \beta$ për këndet:

$$\text{a) } \alpha = 210^\circ, \beta = -60^\circ; \text{ b) } \alpha = -\frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}.$$

2. Caktoje dhe grafikisht paraqite ndryshimin $\alpha - \beta$ për këndet:

$$\text{a) } \alpha = -215^\circ, \beta = -30^\circ; \text{ b) } \alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{8}.$$

3. Caktoje dhe grafikisht paraqite prodhimin:

$$\text{a) } 2 \cdot 75^\circ; \text{ b) } 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right); \text{ c) } (-4) \cdot \frac{\pi}{8}.$$

4. Paraqite këndin në formën $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, ku α është kënd elementar: a) -270° ; b) 450° ; c) -960° ; d) 1800° ; e) -2751° .

5. Caktoje numrin e rrotullimeve të plota ose pjesën e rrotullimit të plotë për këndet madhësia e të cilëve e shprehur në shkallë është:

$$\text{a) } -330^\circ; \text{ b) } 45^\circ; \text{ c) } 120^\circ; \text{ d) } -12^\circ; \text{ e) } 15^\circ; \text{ f) } -700^\circ; \text{ g) } -1080^\circ.$$

6. Pa e përdor kalkulatorin shndërroji shkallët në radianë:

$$\text{a) } 15^\circ; \text{ b) } -75^\circ; \text{ c) } 105^\circ; \text{ d) } -145^\circ; \text{ e) } 300^\circ; \text{ f) } 72^\circ; \text{ g) } 520^\circ; \text{ h) } -390^\circ; \text{ i) } 1040^\circ; \text{ j) } -2500^\circ.$$

7. Paraqite këndin në formën $\alpha + 2k\pi$, ku $k \in \mathbb{Z}$, kurse α është kënd elementar, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

$$\text{a) } 15\pi; \text{ b) } \frac{14\pi}{3}; \text{ c) } -\frac{11\pi}{5}; \text{ d) } \frac{23\pi}{8}; \text{ e) } -\frac{31\pi}{6}.$$

8. Paraqiti në shkallë (pa e përdor kalkulatorin) këta radianë: a) $\frac{5\pi}{12}$; b) $\frac{17\pi}{4}$; c) $-\frac{16\pi}{3}$; d) $\frac{31\pi}{6}$;

$$\text{e) } -\frac{23\pi}{2}; \text{ f) } -\frac{13\pi}{8}.$$

9. Dhëmbëzor me 72 dhëmbëza rrotullohet për:

a) 3 dhëmbëza; b) 4 dhëmbëza; c) 18 dhëmbëza. Njehso këndin që e përshkruan dhëmbëzori në shkallë dhe radianë.

10. Shprehe në shkallë dhe radianë këndin që e përshkruan për një ditë dhe natë

a) shigjeta e orës; b) shigjeta e minutave.

11. Shprehe në radianë këndin e brendshëm të

a) 6-këndëshit; b) 12-këndëshit; c) 24-këndëshit të rregullt.

2.1.2. PËRKUFIZIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI

1. Me qëllim që ta zgjerojmë përkufizimin për funksionet trigonometrike prej këndit të ngushtë në trekëndshin kënddrejtë edhe për funksionet trigonometrike prej çfarëdo këndi, do t'i bartim këndet në sistemin kënddrejtë koordinativ të zgjedhur xOy ashtu që kulmi të jetë në fillimin e koordinatave, kurse krahu fillestar në pjesën pozitive të boshtit të abshisave.

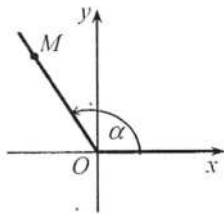


fig.1

Përkufizimi 1. Këndi α është në **pozitën standarde** nëse kulmi i tij është në fillimin e koordinatave O të sistemit kënddrejtë koordinativ xOy , kurse krahu fillestar të puthitet me kahun pozitive të boshtit Ox (fig.1)

Do t'i emërtojmë këndet edhe varësisht prej asaj në cilin kuadrant është krahu i mbarimit të këndit. Për shembull, nëse këndi α është në pozitën standarde, kurse krahu i mbarimit OM është në kuadrantin II, do të themi se këndi α është në kuadrantin II (fig.1).

➤ **Shembulli 1.** Të caktojmë në cilin kuadrant janë këndet:

a) $\alpha = 950^\circ$; b) $\beta = -2280^\circ$; c) $\gamma = \frac{54\pi}{5}$.

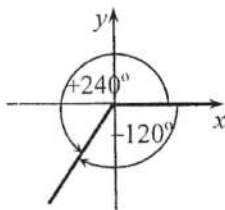


fig.2

Zgjidhje. a) Kemi: $950^\circ = 230^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Pasi $230^\circ \in (180^\circ, 270^\circ)$,

Këndi $\alpha = 950^\circ$ është në kuadrantin III;

b) $-2280^\circ = -120^\circ - 6 \cdot 360^\circ$. Pasi $-120^\circ \in (-90^\circ, -180^\circ)$, vijon se

$\beta = -2280^\circ$ është kënd në kuadrantin III (fig.2). Mundet edhe kështu:

$$-2280^\circ = -7 \cdot 360^\circ + 240^\circ, \text{ ku këndi } 240^\circ \in (180^\circ, 270^\circ) \text{ është kënd i}$$

përmbaaruar me këndin -120° .

c) $\frac{54\pi}{5} = \frac{50 + 4}{5} \pi = 10\pi + \frac{4}{5} \pi = 5 \cdot 2\pi + \frac{4}{5} \pi$. Pasi $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$,

këndi $\gamma = \frac{54\pi}{5}$ është në kuadrantin II. ■

Përkufizimi 2. Këndin në pozitën standarde krahu i mbarimit i të cilit puthitet me boshtin Ox ose Oy , do ta quajmë **këndi i kuadrantit**.

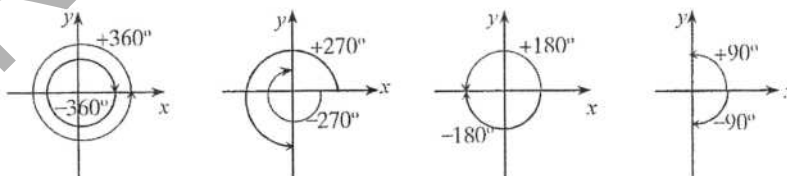


fig.3

Këndet e kuadrantëve janë, për shembull, këndet me madhësi: -360° , -270° , -180° , -90° , 90° , 180° , 270° dhe 360° (fig.3), por jo edhe çdo kënd që ndryshon prej tyre për numër të plotë të rrotullimeve.

Të vërejmë se për këndet e kuadrantëve vlejné këto zbërthime:

$$-360^\circ = -4 \cdot 90^\circ, \quad -270^\circ = -3 \cdot 90^\circ, \quad -180^\circ = -2 \cdot 90^\circ, \\ 180^\circ = 2 \cdot 90^\circ, \quad 270^\circ = 3 \cdot 90^\circ, \quad 360^\circ = 4 \cdot 90^\circ$$

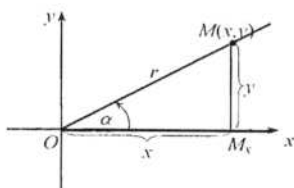


fig.4

2. Le të jetë α kënd i ngushtë në kuadrantin e parë, dhe le të jetë $M(x, y) \neq O(0,0)$ çfarëdo pike e krahut të mbarimit të këndit (fig. 4). Në trekëndëshin OM_xM : $x = \overline{OM_x}$ është krah i përbrinjshëm për këndin α , $y = \overline{M_xM}$ është katetë e përballshme për këndin α , kurse $r = \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$ është hipotenuzë.

Të përkujtohem: për këndin e ngushtë α në trekëndëshin OM_xM funksionet trigonometrike sinus, kosinus, tangens dhe kotangens janë përcaktuar me barasitë:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}. \quad (1)$$

Duke i përcjellur këto përkufizime do t'i përkufizojmë funksionet trigonometrike sinus, kosinus, tangens dhe kotangens prej çfarëdo këndi. Për këtë qëllim do ta vërtetojmë këtë

Teoremë. Për çfarëdo pikë të zgjedhur $M(x, y)$ të krahut të mbarimit prej këndit α në pozitën standarde, çdonjëri prej raporteve

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \quad (2)$$

është njëvlerësisht i përcaktuar ose nuk ekziston.

Vërtetimi: a) Le të jetë $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, përkatësisht α nuk është kënd i kuadrantit. Të marrim, për shembull, kënde në kuadrantin I dhe II (fig. 5). Le të jenë $M(x, y)$ dhe $M'(x', y')$ çfarëdo dy pika të krahut të mbarimit të këndit α ku $M \neq O, M' \neq O$. T'i shqyrtojmë trekëndëshat e ngjashëm:

$$\Delta OM_x M \sim \Delta OM'_x M' \quad (3)$$

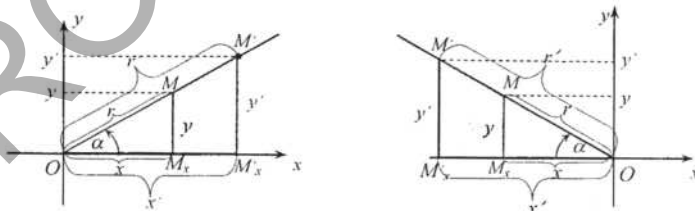


fig. 5

Gjatësitë e katetave të $\Delta OM_x M$ dhe $\Delta OM'_x M'$ janë vlerat absolute prej koordinatave të pikave M dhe M' , d.m.th. $\overline{OM_x} = |x|$, $\overline{MM_x} = |y|$, $\overline{OM'_x} = |x'|$ dhe $\overline{M'M'_x} = |y'|$, kurse hipotenuzat janë $r = \overline{OM}$ dhe $r' = \overline{OM'}$. Prej ngjashmërisë (3), për shembull, vijon:

$$\frac{\overline{OM_x}}{\overline{OM'_x}} = \frac{|x'|}{|x|} = \frac{r'}{r} \quad \text{ose} \quad \frac{|x'|}{r'} = \frac{|x|}{r}.$$

Pasi pikat M dhe M' janë në kuadrantin e njëjtë, abshisat x dhe x' janë numra me shenjë të njëjtë (që të dy pozitive ose negative), pra raportet $\frac{x}{r}$ dhe $\frac{x'}{r'}$ puthiten jo vetëm sipas vlerës absolute, por edhe sipas shenjës. Vijon

$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$, që do të thotë se për këndin e dhënë α raporti $\frac{x}{r}$ nuk varet prej zgjedhjes së pikës M .

Për tri raportet tjera teorema vërtetohet në mënyrë analoge.

b). Le të jetë α kënd i kuadrantit, d.m.th. $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

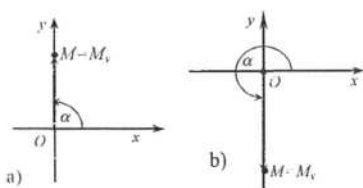


fig.6

Për çfarëdo pike të zgjedhur M prej krahut të mbarimit:

1° për $M \in Oy$ - boshti, $x=0$, $|y|=r$, dhe atëherë:

nëse $M \in +Oy$, $\frac{x}{r} = 0$, $\frac{y}{r} = 1$, $\frac{x}{y} = 0$, $\frac{y}{x}$ nuk ekziston (fig.6a);

nëse $M \in -Oy$, $\frac{x}{r} = 0$, $\frac{y}{r} = -1$, $\frac{x}{y} = 0$, $\frac{y}{x}$ nuk ekziston (fig.6b);

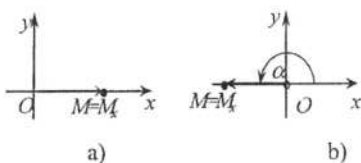


fig.7

2° për $M \in Ox$ - boshti, $y=0$, $|x|=r$, dhe atëherë:

nëse $M \in +Ox$, $\frac{y}{r} = 0$, $\frac{x}{r} = 1$, $\frac{y}{x} = 0$, $\frac{x}{y}$ nuk ekziston (fig.7a);

nëse $M \in -Ox$, $\frac{y}{r} = 0$, $\frac{x}{r} = -1$, $\frac{y}{x} = 0$, $\frac{x}{y}$ nuk ekziston (fig.7b) ♦

Prej teoremës vijon se këndit të dhënë mund t'i shoqërojmë nga një numër real $\frac{x}{r}$ ose $\frac{y}{r}$, por kur $x \neq 0$ ose $y \neq 0$ dhe nga një numër real $\frac{y}{x}$ ose $\frac{x}{y}$. Me këto raporte i përcaktojmë funksionet trigonometrike sinus, kosinus, tangens dhe kotangens prej këndit α .

Përkufizimi 1. Sinus i këndit α është raporti ndërmjet ordinatës y të çfarëdo pike M prej krahut të mbarimit të këndit α në pozitën standarde dhe largësisë r të pikës M prej fillimit të koordinatave O , d.m.th.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad (4)$$

Përkufizimi 2. Kosinus i këndit α është raporti ndërmjet abshisës x të çfarëdo pike M prej krahut të mbarimit të këndit α në pozitën standarde dhe largësisë r të pikës M prej fillimit të koordinatave O , d.m.th.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad (5)$$

Përkufizimi 3. Tangens i këndit α është raporti ndërmjet ordinatës y dhe abshisës x të çfarëdo pike M prej krahut të mbarimit të këndit α në pozitën standarde, d.m.th.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad (6)$$

Përkufizimi 4. Kotangens i këndit α është raporti ndërmjet abshisës x dhe ordinatës y të çfarëdo pike M prej krahut të mbarimit të këndit α në pozitën standarde, d.m.th.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \quad (7)$$

► **Shembulli 2.** T'i caktojmë vlerat e funksioneve trigonometrike $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, nëse krahu i mbarimit të këndit α e përmban pikën $M(-2, 1)$.

Zgjidhje. Këtu $x = -2$, $y = 1$ dhe $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, kurse sipas përkufizimeve 1 – 4 kemi

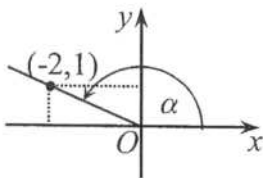


fig.8

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \blacksquare$$

DETYRA

1. Në cilin kuadrant është këndi:

- a) 75° ; b) 327° ; c) 3151° ; ç) 286° ; d) 359° ;
e) -98° ; f) -300° ; g) -589° ; h) -1272°

2. Në cilin kuadrant është këndi:

- a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{7\pi}{8}$; d) $\frac{29\pi}{9}$
e) $\frac{11\pi}{3}$; f) $-\frac{7\pi}{6}$; g) $-\frac{24\pi}{5}$

3. Në sistemin kënddrejtë koordinativ janë dhënë pikat: a) $(-1, 3)$; b) $(-2, -1)$; c) $(2, -3)$.

Shkico nga dy kënde të përmbuar ku krahu të mbarimit t'i takojë pika e dhënë. Në cilin kuadrant janë ato kënde?

4. Cakto funksionet trigonometrike $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ nëse krahu i mbarimit të këndit α në pozitën standarde e përmban pikën:

- a) $(1, 0)$; b) $(0, 3)$; c) $(-3, 1)$; ç) $(-4, 0)$;
d) $(-3, 3)$; e) $(0, -4)$; f) $(2, -5)$.

2.1.3. PËRKUFIZIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE NË VIJËN RRETHORE TRIGONOMETRIKE.

1. Vija rrethore trigonometrike . Në rrafsh le të jetë dhënë sistemi kënddrejtë koordinativ xOy .

Përkufizimi 1. *Vijën rrethore $K(O,1)$, me qendër në fillimin e koordinatave O dhe rreze $r=1$, e quajmë **vijë rrethore trigonometrike**.*

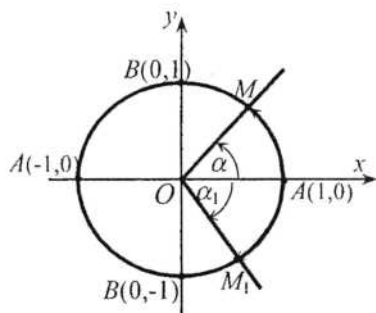


fig.1

Boshtet koordinative e ndajnë rrafshin, por bashkë me atë edhe vijën trigonometrike K , në katër pjesë të barabarta – **kuadrantë**. Pikëprerjet e K me boshtet koordinative:

$$Ox \cap K = \{A(1,0), A_1(-1,0)\}; Oy \cap K = \{B(0,1), B_1(0,-1)\} \text{ (fig.1)}$$

Le të jetë α çfarëdo kënd i zgjedhur në pozitën standarde. Atij i përgjigjet pika e vetme M e $B(0,1)$, kurse ajo është pikëprerja e krahut të mbarimit të α me K . Gjithashtu, çdo pikë M nga vija rrethore përcakton kënd qëndror krahut i mbarimit të të cilit është drejtëza OM , kurse atij i përgjigjet harku AM i vijës rrethore e jashtëshkruar prej pikës A gjatë rotullimit të krahut OA rreth O deri te pozita e mbaimit OM . Nëse këndi α është „+” i orientuar, atëherë edhe harku AM është „+” i orientuar; nëse këndi α është „-” i orientuar, atëherë edhe harku AM është „-” i orientuar.

Mendo! Pika M a përcakton një kënd të vetëm?

2. Në t.2.2 treguam se funksionet trigonometrike nuk varen prej zgjedhjes së pikës M të krahut të mbarimit të këndit. Kjo do të thotë se vlerat e këtyre funksioneve nuk varen prej asaj në cilën largësi prej fillimit të koordinatave do ta marrim pikën M . Nëse për çfarëdo kënd α pikën M e zgjedhim në largësi të barabartë $r = \overline{OM} = 1$, ajo do të shtrihet në vijën rrethore trigonometrike, kurse këndi α (në pozitën standarde) do ta shqyrtojmë se si këndi që e formojnë dy rreze të vijës rrethore trigonometrike: $\overline{OA}$ si krah fillestar dhe $\overline{OM}$ si krah i mbarimit të këndit α (fig.2). Atëherë funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus prej çfarëdo këndi α janë:

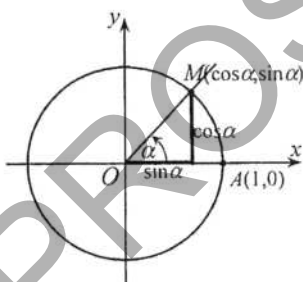


fig.2

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x.$$

Tani mund t'i shprehim këto përkufizime për funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus:

Përkufizimi 1'. *Sinusi i çfarëdo këndi α në pozitën standarde është i barabartë me ordinatën e pikëprerjes M të krahut të mbarimit të këndit me vijën rrethore trigonometrike, d.m.th.*

$$\sin \alpha = y$$

$$(1')$$

Përkufizimi 2'-Kosinusi i çfarëdo këndi α në pozitën standarde është i barabartë me abshisën e pikëprerje M të krahut të mbarimit të këndit me vijën rrethore trigonometrike, d.m.th.

$$\cos \alpha = x$$

(2')

Prej (1') dhe (2') vijon se koordinatat e çfarëdo pike $M(x,y)$ prej vijës rrethore trigonometrike dhe të krahut të mbarimit të këndit α në pozitën standarde, janë vlerat e funksioneve trigonometrike sinus dhe kosinus prej këndit α d.m.th.

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha$$

Vërejtje. Për shkak të përkufizimeve 1' dhe 2' funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus quhen **funksione rrethore**.

➤ **Shembulli 1.** Në vijën rrethore trigonometrike ta përcaktojmë pikën M e cila është në krahun e mbarimit prej këndit $\alpha = 30^\circ$.

Zgjidhje. Në pajtim me përkufizimet 1' dhe 2' koordinatat e pikës M janë:

$$x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \text{ Domethënë } M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \blacksquare$$

Prej përkufizimeve 1' dhe 2' dhe jobarazimeve $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, të cilat i kënaqin abshisat dhe ordinatat e çfarëdo pike prej vijës rrethore trigonometrike, vijon se për çfarëdo kënd α vlejné jobarasitë:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{ose} \quad |\sin \alpha| \leq 1 \quad (3)$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{ose} \quad |\cos \alpha| \leq 1 \quad (4)$$

Për shkak të vetive (3) dhe (4) themi se funksionet $\sin \alpha$ dhe $\cos \alpha$ janë **funksione të kufizuara**.

➤ **Shembulli 2.** A mund të caktojmë kënd α të atillë: a) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; b) $\sin \alpha = \frac{3}{2}$.

Zgjidhje. a) Pasi $-1 < \frac{1}{3} < 1$, vijon se ekziston kënd α i atillë që $\cos \alpha = \frac{1}{3}$;

b) pasi $y = \sin \alpha$ dhe $\frac{3}{2} > 1$, nuk ekziston kënd α për të cilin $\sin \alpha = \frac{3}{2}$ ■

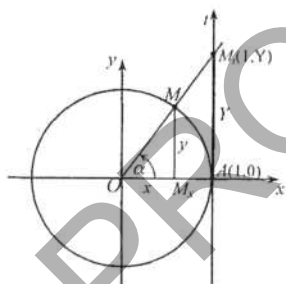


fig.3

Për paraqitjen gjeometrike të tangensit dhe kotangensit i fusim konceptet boshti i tangensit dhe kotangensit.

Bosht të tangensit e quajmë tangentën At të vijës rrethore trigonometrike K në pikën $A(1,0)$, kahja e të cilës është e njëjtë me kahen e boshtit Oy (fig.3).

Le të jetë $\alpha = \angle AOM$ dhe $OM \cap At = M_t(1,Y)$, atëherë vlen ky gjykim:

Tangensi i këndit α është i barabartë me ordinatën Y të pikës $M_t(1,Y)$, d.m.th.

$$\operatorname{tg} \alpha = Y.$$

(5)

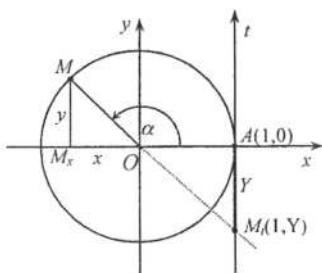


fig.4

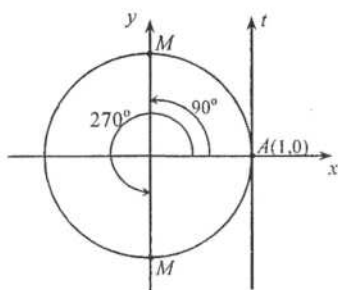


fig.5

Me të vërtetë,

1° nëse $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ (fig. 3), atëherë

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{Y}{OA} = \frac{Y}{1} = Y \geq 0$$

2° nëse $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ (fig.4), atëherë prej ngjashmërisë $\triangle OMM_x \sim \triangle OM_yA$ kemi:

$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|Y|}{1} \Rightarrow \frac{y}{-x} = \frac{-Y}{1} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = Y \leq 0.$$

3° nëse pika M është në boshtin e ordinatës ($\alpha=90^\circ$ ose $\alpha=270^\circ$), atëherë $OM \parallel At$, pra $OM \cap At = \emptyset$, d.m.th. $\operatorname{tg} \alpha$ nuk ekziston (fig.5) ♦

Interpretim analog mund të japim edhe për $\operatorname{ctg} \alpha$

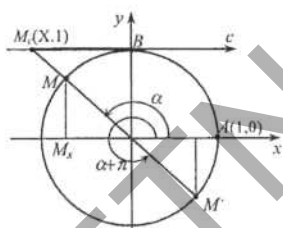
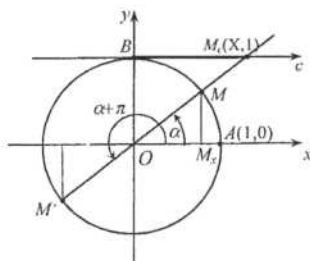


fig.6

Bosht të kotangensit quajmë bosh-tin Bc që e prek vijën rrethore trigonometrike në pikën $B(0,1)$ dhe ka kahe të njëjtë me boshtin e abshisës.

Le të jetë $M_c(X,1) = OM \cap Bc$ (fig.6).

Nga ngjashmëria: $\triangle OMM_y \sim \triangle M_cOB$, me shqyrtime analoge sikurse për tangensin, sipas fig. 6 fitojmë:

Kotangensi i këndit α është i barabartë me abshisën e pikës M_c , d.m.th.

$$\operatorname{ctg} \alpha = X$$

(6)

► **Shembulli 3.** Ta caktojmë funksionin trigonometrik $\operatorname{tg} \alpha$ nëse krahu i mbarimit të këndit α i përmban pikat: a) $(1, \sqrt{3})$; b) $(1, -2)$.

Zgjidhje. a) Pika $(1, \sqrt{3})$ shtrihet në boshtin e tangensit dhe në pajtim me (5): $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

b) Nga shkaqe të njëjta sikurse edhe nën a) kemi: $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ■

► **Shembulli 4.** Ta caktojmë funksionin trigonometrik $\operatorname{ctg} \alpha$ nëse krahu i mbarimit të këndit α i përmban pikat: a) $(1,1)$ b) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.

Zgjidhje. Pikat për të cilat koordinata e dytë, është 1, shtrihen në boshtin e kotangensit. Sipas (6), kemi: a) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ b) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ■

1. Në vijën rrethore trigonometrike cakto pikën M e cila është në krahun e mbarimit të këndit:

a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 65^\circ$.

2. Në vijën rrethore trigonometrike vendos pikë abshisa e së cilës është $x = \frac{1}{2}$. Sa pika të atila ka? Si është pozita e tyre në lidhje me boshtin x ?

3. Cila prej këtyre barasive është e mundshme: a) $\cos \alpha = 2 - \sqrt{2}$; b) $\sin \alpha = \sqrt{3} - 2$; c) $\cos \alpha = \sqrt{5} - 4$.

2.1.4. KAKTIMI GRAFIK I KËNDIT DHE VLERËS SË FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PËR VLERËN E DHËNË TË NJËRIT PREJ FUNKSIONEVE. SHENJA E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

1. Përkufizimi i funksioneve trigonometrike na mundëson graffikisht ta caktojmë këndin nëse është dhënë vlera e njërës prej funksioneve trigonometrike, si edhe vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

► **Shembulli 1.** Ta caktojmë graffikisht këndin α nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos \alpha = -0,5$

Zgjidhje. a) Sipas përkufizimit të funksionit $\sin \alpha$ në vijën rrethore trigonometrike K duhet ta caktojmë pikën M në të cilën krahun i dytë të këndit α e prenë vijën rrethore, ordinata e së cilës është e barabartë me $\frac{2}{3}$. Për atë qëllim në „+“ kahjen e boshtit y e bartim segmentin $\overline{OP} = \frac{2}{3}$, dhe nëpër P tërheqim drejtëz paralele me boshtin x (fig.1). Pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore, M dhe M_1 , i caktojnë këndet α dhe α_1 sinusi i të cilit është i barabartë me $\frac{2}{3}$.

b) Në vijën rrethore $K(O,1)$ duhet të caktojmë pikën abshisa e së cilës është $-0,5$. Në kahen negative të boshtit x e bartim segmentin $\overline{OP} = 0,5$, dhe nëpër pikën P tërheqim drejtëz paralele me boshtin y (fig.2). Pikat M dhe M_1 prej vijës rrethore K i caktojnë këndet α dhe α_1 kosinusi i të cilit është $-0,5$ ■

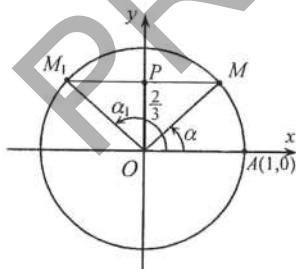


fig.1

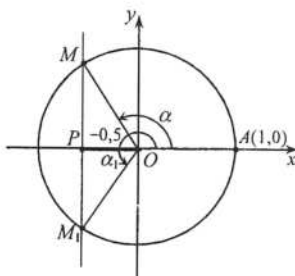


fig.2

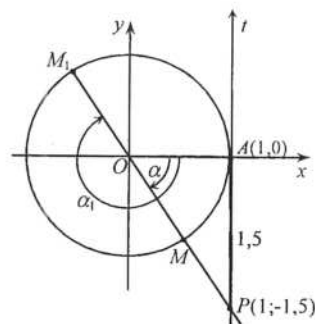


fig.3

► **Shembulli 2.** Ta caktojmë, grafikisht këndin α nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$.

Zgjidhje. Në kahen negative prej boshtit të tangensit bartim segment $\overline{AP} = 1,5$ Nëpër pikën $P(1; 1,5)$ dhe fillimit të koordinatave O tërheqim drejtëz p (fig.3). Pikëprerjet M_1 dhe M_2 të drejtëzës dhe vijës rrethore i përcaktojnë këndet α_1 dhe α_2 të cilët do t'i masim me këndmatës.

► **Shembulli 3.** T'i caktojmë grafikisht vlerat e funksioneve trigonometrike $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ dhe $\operatorname{ctg} \alpha$ nëse është dhënë vlera $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ dhe α kënd prej kuadrantit III.

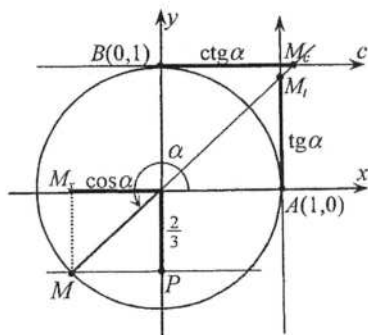


fig.4

Zgjidhje. Me konstruksionin e njëjtë sikurse në shembullin 1, në kahen negative prej boshtit y bartim segment $\overline{OP} = \frac{2}{3}$ dhe e përcaktojmë pikën M (fig.4). Abshisa x e pikës M është vlera e kërkuar e $\cos \alpha$. Në vazhdim të drejtëzës OM në prerjen me boshtin e tangensit e përcaktojmë pikën M_t , ordinata e së cilës është e barabartë me $\operatorname{tg} \alpha$ kurse në prerjen me boshtin e kotangensit pikën M_c , abshisa e së cilës është e barabartë me vlerën e $\operatorname{ctg} \alpha$. ■

2. Shenja e funksioneve trigonometrike. Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike vijon se **shenjë**n e vlerës së tyre për këndet në kuadrant të veçantë e përcaktojmë në pajtim me shenjat e koordinatave të pikave në ata kuadrantë. Kështu kemi:

1. Funksioni i sinusit është pozitiv për këndet në kuadrantët I dhe II, kurse negativ për këndet në kuadrantët III dhe IV, d.m.th.

$\sin \alpha > 0$ për $0 < \alpha < \pi$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) dhe $\sin \alpha < 0$ për $\pi < \alpha < 2\pi$ ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$)

2. Funksioni i kosinusit është pozitiv për këndet në kuadrantin I dhe IV, kurse është negativ për këndet në kuadrantët II dhe III, d.m.th.

$\cos \alpha > 0$ për $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; ($-90^\circ < \alpha < 90^\circ$) dhe $\cos \alpha < 0$ për $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; ($90^\circ < \alpha < 270^\circ$)

3. Funksionet tangens dhe kotangens janë pozitiv për këndet në kuadrantin I dhe III, kurse janë negativ për këndet në kuadrantin II dhe IV, d.m.th.

$\operatorname{tg} \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0$ për $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ dhe $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

$\operatorname{tg} \alpha < 0, \operatorname{ctg} \alpha < 0$ për $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ dhe $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Radhitjen e shenjave sipas kuadrantëve mund ta paraqesim me skemë sikurse në fig. 5.

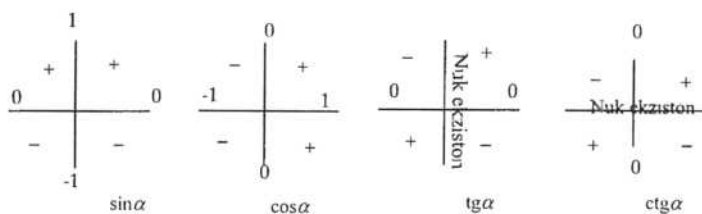


fig.5

➤ **Shembulli 4.** Ta konstatojmë shenjën të numrave pa e caktuar vlerën e funksioneve trigonometrike: a) $\sin 120^\circ$; b) $\cos 1000^\circ$; c) $\sin(-\frac{4\pi}{5})$.

Zgjidhje. a) Këndi $\alpha = 120^\circ$ është në kuadrantin II, prandaj $\sin 120^\circ > 0$;
b) këndi $\beta = 1000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$ është në kuadrantin IV, prandaj $\cos 1000^\circ > 0$;
c) këndi $\gamma = -\frac{4\pi}{5} = -\pi + \frac{\pi}{5}$ është në kuadrantin III, prandaj $\sin(-\frac{4\pi}{5}) < 0$. ■

➤ **Shembulli 5.** Ta konstatojmë shenjën e numrave: a) $\tan 220^\circ \cdot \tan(-1240^\circ)$; b) $\cotg(-\frac{12\pi}{5})$.

Zgjidhje. a) Këndi prej 220° është në kuadrantin III, prandaj $\tan 220^\circ > 0$, kurse këndi $-1240^\circ = (-3) \cdot 360^\circ + (-160^\circ)$ është kënd në kuadrantin III, prandaj është $\tan(-1240^\circ) > 0$. Vijon,
 $\tan 220^\circ \cdot \tan(-1240^\circ) > 0$;

b) $-\frac{12\pi}{5} = -\frac{10\pi + 2\pi}{5} = -2\pi - \frac{2\pi}{5}$ është kënd në kuadrantin IV, prandaj $\cotg(-\frac{12\pi}{5}) < 0$. ■

➤ **Shembulli 6.** Të caktojmë në cilin kuadrant është këndi α nëse është:

a) $\cos \alpha < 0$ dhe $\tan \alpha > 0$; b) $\sin \alpha > 0$ dhe $\cos \alpha < 0$.

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cotg \alpha$	+	-	+	-

Zgjidhje. Për caktimin e shenjës së funksioneve trigonometrike mund të shërbejemi me tabelën majtas, sipas të cilës lehtë gjejmë:

a) $\cos \alpha < 0$ dhe $\tan \alpha > 0$ nëse këndi α është në kuadrantin III;

b) $\sin \alpha > 0$ dhe $\cos \alpha < 0$ nëse këndi α është në kuadrantin II. ■

DETYRA

1. Cakto grafikisht këndin α nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik:

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$; b) $\cos \alpha = 0,25$; c) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$; ç) $\sin \alpha = 0,6$.

2. Cakto grafikisht këndin α nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik

a) $\tan \alpha = -\frac{3}{2}$; b) $\cotg \alpha = 1,5$.

3. Në cilët kuadrantë: a) $\sin \alpha$ dhe $\cos \alpha$ kanë shenja të njëjta; b) $\tan \alpha$ dhe $\cotg \alpha$ kanë shenja të ndryshme;

c) $\cos \alpha$ dhe $\cotg \alpha$ kanë shenja të njëjta.

4. Në cilin kuadrant është: a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$; b) $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$; c) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} < 0$.

5. Pa e caktuar vlerën e saktë, cakto shenjën e shprehjeve:

a) $\frac{\sin 120^\circ}{\operatorname{tg} 340^\circ}$; b) $\cos 73^\circ \cdot \operatorname{tg} 235^\circ$; c) $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin 250^\circ \cdot \cos 380^\circ}$; ç) $\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{5\pi}{4}$; d) $\frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}}$; e) $\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{4}}{\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{3}}$

6. Nëse $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Cakto shenjën e shprehjes:

a) $\sin(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$; b) $\frac{\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$; c) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha)}$.

2.1.5. VLERAT E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ DISA KËNDEVE

Vitin e kaluar shkollor i caktuam vlerat e funksioneve trigonometrike sinus, kosinus, tangens dhe kotangens prej këndit α të barabartë me 30° , 45° dhe 60° , nëse α është kënd i ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë. Tani do të tregojmë se si vijmë deri te vlerat e njëjta në bazë të përkufizimit të funksioneve trigonometrike në vijën rrethore trigonometrike.

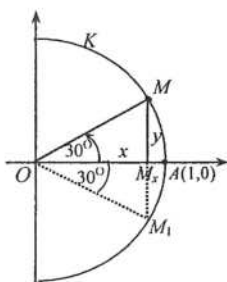


fig.1

1. Le të jetë $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ($=30^\circ$) kënd i formuar prej rrezes OM në vijën

rrethore trigonometrike K (fig.1). Sipas përkufizimit të funksioneve trigonometrike në vijën rrethore K , kemi:

$$\sin \frac{\pi}{6} = y, \quad \cos \frac{\pi}{6} = x.$$

Prej trekëndëshit OMM_1 , i cili është trekëndësh barabrinjës me brinjë $OM = OM_1 = MM_1 = 1$ (pse?) gjejmë:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \overline{MM_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

prej ku është

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Gjithashtu, $x = \overline{OM_x}$ është lartësia e trekëndëshit OMM_1 , pra vijon $x = \frac{\overline{OM} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, prej ku fitojmë:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

2. Le të jetë $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($=45^\circ$) (fig.2). Trekëndëshi OM_xM është trekëndësh kënddrejtë barakrahës

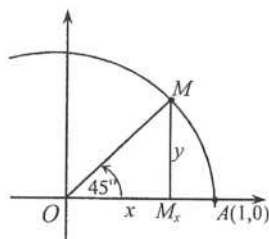


fig.2

(pse?) me krahë $\overline{OM_x} = x = y = \overline{M_xM}$, pra sipas teoremës së Pitagorës kemi: $x^2 + y^2 = 1$ d.m.th. $2x^2 = 1$, prej ku gjejmë $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vijon:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{x}{y} = 1$$

3. Le të jetë $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($=60^\circ$). Ta shqyrtojmë trekëndëshin OMA në fig.3 me kënd $\alpha = \angle AOM = \frac{\pi}{3}$.

Ai është trekëndësh barabrinjës (pse?) me brinjë $\overline{OA} = \overline{OM} = \overline{MA} = 1$. Normalja $\overline{MM_x} = y$ është lartësia dhe vija e rëndimit në trekëndëshin OMA pra kemi:

$$y = \overline{MM_x} = h = \frac{\overline{OM} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{dhe} \quad x = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

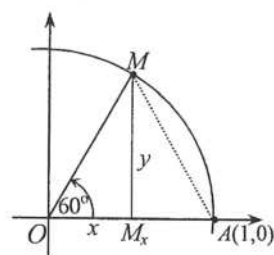


fig.3

Vijon:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{x}{y} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Nëse $\alpha = 0$ ose $\alpha = 2\pi$ atëherë krahu i parë dhe i dytë i këndit α puthiten me pjesën pozitive të boshtit x , kurse pika M , e cila është prerje e krahut të mbarimit të këndit me vijën rrethore trigonometrike, puthitet me pikën $A(1,0)$ (fig.4a). Prandaj:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{ctg} 0 = \frac{1}{0} \text{ nuk ekziston}$$

5. Nëse $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($=90^\circ$), krahu i dytë i këndit α puthitet me pjesën pozitive të boshtit y , dhe pika M do të puthitet me pikën $B(0,1)$ (fig.4b). Atëherë kemi:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} \text{ nuk ekziston}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Nëse $\alpha = \pi (=180^\circ)$, krahu i dytë i këndit α puthitet me pjesën negative të boshtit x , kurse pika M puthitet me pikën $A_1 (-1,0)$ (fig.4c). Prandaj kemi:

$$\sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \operatorname{tg} \pi = \frac{0}{-1} = 0, \operatorname{ctg} \pi = \frac{-1}{0} \text{ nuk ekziston}$$

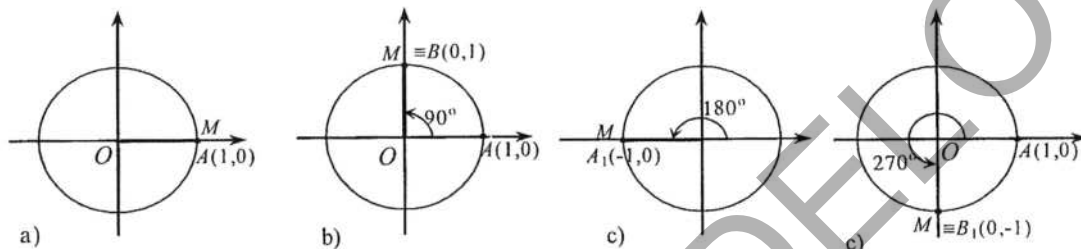


fig.4

Nëse $\alpha = \frac{3\pi}{2} (=270^\circ)$ krahu i dytë i këndit α puthitet me pjesën negative të boshtit y , pika M puthitet me pikën $B_1 (0,-1)$ (fig.4d). Vijon:

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1; \cos \frac{3\pi}{2} = 0; \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{0} \text{ nuk ekziston}; \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0$$

Për vlerat e $\operatorname{tg} \alpha$ në rrethinën e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dhe $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, dhe $\operatorname{ctg} \alpha$ në rrethinën $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ dhe $\alpha = 2\pi$ do të bëhet fjalë më vonë.

➤ **Shembulli 1.** Ta njehsojmë vlerën e shprehjes: $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 270^\circ$.

Zgjidhje. Kemi: $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 0 = 0$. ■

Shembulli 2. Ta provojmë barasinë: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, për $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Zgjidhje. Pasi $\cos 2\alpha = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \cos \pi = -1$ dhe

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 - 1 = -1$$

përfundojmë se barasia e dhënë vlen për $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Provoje a vlen ajo për $\alpha = \frac{\pi}{6}$, kurse pastaj edhe për $\alpha = 45^\circ$. ■

1. Vendosi vlerat përkatëse të funksioneve trigonometrike në tabelën e poshtme

	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)
$\sin \alpha$							
$\cos \alpha$							
$\operatorname{tg} \alpha$							
$\operatorname{ctg} \alpha$							

2. Vërteto se vlera e shprehjes është zero:

a) $\sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\sin \pi}{\sin \frac{\pi}{2}}$; c) $\frac{\sin 0^\circ + \operatorname{tg} 0^\circ}{\sin 90^\circ + \cos 0^\circ}$.

3. Njehso vlerën e shprehjeve:

a) $2 \cos 30^\circ + \sin 45^\circ + 3 \operatorname{tg} 180^\circ$; b) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}$; c) $1 - \operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{ctg} 270^\circ$.

4. Provo a janë të sakta barasitë

a) $(1 - \operatorname{ctg} 90^\circ) \cdot (1 + \operatorname{ctg} 90^\circ) = 1$; b) $(\frac{1}{\cos 60^\circ} + \frac{1}{\sin 30^\circ}) \operatorname{tg} 0^\circ = \sin 45^\circ - \cos 45^\circ$; c) $\frac{\operatorname{tg} 180^\circ}{\sin 45^\circ} + \frac{\operatorname{ctg} 270^\circ}{\cos 45^\circ} = 2$.

5. Caktoje vlerën numerike të shprehjeve:

a) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \cos \alpha}$ për $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$ për $\alpha = \frac{\pi}{2}$; c) $\frac{3 \sin^2 \alpha}{4} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ për $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

6. Provo barasitë:

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, për $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = 2\pi$; b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, për $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$;

c) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, për $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 270^\circ$, $\alpha = 0^\circ$.

MENELAJ (shekulli I) – matematikan dhe astronom i vjetër grek. I njohur sipas veprës *Sferiki*, e ruajtur në përkthimin arab, në të cilën, përveç shqyrtimeve, janë përfshirë edhe pyetje nga gjeometria sferike dhe veçanërisht nga trigonometria sferike. Në këtë vepër janë vendosur teoremat e përmendura, sot të njohura si *teoremat e Menelait*, prej të cilave njëra me shekuj ka qenë bazë e trigonometrisë sferike.

2.1.6. DISA RELACIONE NDËRMJET FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

Vitin e kaluar shkollor u njohe me disa varësi (relacione) ndërmjet funksioneve trigonometrike prej këndit të njëjtë nëse ai është i ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë. Tani do të përkujtohem në disa prej tyre dhe të njëjtit do t'i zgjerojmë për çfarëdo kënd.

Përkufizimi. Identitet trigonometrik e quajmë barazinë që përmban funksione trigonometrike prej këndit, i cili është i saktë për të gjitha ato vlera të këndit për të cilat janë përcaktuar funksionet e të dy anëve të barazive.

Vlerat e këndit α për të cilën barazia e dhënë është identitet i quajmë **vlera të lejuara** të këndit α .

Barazia e cila nuk është identitet e quajmë **barazi kushtore** ose **barazim**. Për shembull, barazia trigonometrike

$$\sin x = \cos x$$

nuk është identitet, por barazim, pasi ekzistojnë vlera për x (për shembull $x=0$) për të cilat barazia nuk është e saktë.

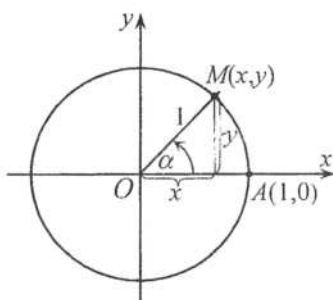


fig.1

1. Shuma e katrorëve të sinusit dhe kosinusit prej çfarëdo këndi α është e barabartë me një, d.m.th.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Vërtetim. Le të jetë α çfarëdo kënd krahu i dytë i të cilit e pren vijën rrethore trigonometrike në pikën $M(x,y)$ (fig.1). Prej teoremës së Pitagorës për trekëndëshin OMM_1 kemi

$$|x|^2 + |y|^2 = 1 \text{ ose } x^2 + y^2 = 1. \quad (*)$$

Nga ana tjetër, sipas përkufizimit të funksioneve trigonometrike, për koordinatat x dhe y të pikës M kemi $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ të cilët kur do t'i zëvendësojmë në $(*)$ fitojmë: $\square \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \spadesuit$

2. Tangensi prej këndit α është i barabartë me herësin prej sinusit dhe kosinusit të këndit α , d.m.th.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Vërtetim: Prej përkufizimit $\operatorname{tg} \alpha$ kemi: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \spadesuit$

3. Kotangensi prej këndit α është i barabartë me herësin prej kosinusit dhe sinusit të këndit α :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Edhe ky identitet vijon drejtpërdrejt prej përkufizimit të $\operatorname{ctg} \alpha$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. ♦

Në praktikë shpeshherë ka nevojë për shfrytëzimin e vlerës reciproke prej funksioneve sinus dhe kosinus, prandaj i përkufizojmë edhe këto funksione.

4. **Sekansi** prej këndit α është vlera reciproke e kosinusit të këndit α , d.m.th.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (4)$$

5. **Kosekansi** prej këndit α është vlera reciproke e sinusit të këndit α , d.m.th.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi \quad (5)$$

Formulat (1)-(3) paraqesin *varësi themelore trigonometrike (identitete)*. Ato fitohen pavarësisht njëra prej tjetrës në bazë të përkufizimeve të funksioneve trigonometrike dhe janë të sakta për të gjitha vlerat e lejuara të këndit. Prej tyre me transformime të ndryshme mund të fitojmë relacione të ndryshme ndërmjet funksioneve trigonometrike. Do ta tregojmë atë në disa shembuj:

6. Nëse i shumëzojmë anët e majta dhe të djathta të (2) dhe (3) e fitojmë identitetin:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z \quad (6)$$

7. Nëse të dy anët e identitetit (1) i pjesëtojmë me $\cos^2 \alpha \neq 0$ fitojmë:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \quad (7)$$

ose

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (8)$$

8. Nëse identitetin (1) e pjesëtojmë me $\sin^2 \alpha \neq 0$, e fitojmë identitetin:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in Z, \quad (9)$$

përkatesisht

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad (10)$$

9. Nëse te formula (10), në pajtim me (6), vëndojmë $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ fitojmë relacion që e lidh sinusin dhe tangensin:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z. \quad (11)$$

Duke i zbatuar formulat prej (1) deri te (11) mund të vërtetojmë disa identitete më të ndërlikuara ose të thjeshtojmë shprehje të ndryshme, duke pasur llogari për vlerat e lejuara të argumentit. Po ashtu nuk ekziston metodë universale për atë se si t'i vërtetojmë, por vetëm disa udhëzime praktike. Ja disa sugjerime:

1. Njërën anë të barazisë me ndihmën tani më të identiteteve të njohura dhe transformimet identike algebrike e sjellim në anën tjetër. Është e preferueshme të nisemi prej anës me shprehje më të ndërlikuar dhe atë ta transformojmë deri në shprehje më të thjeshtë.

➤ **Shembulli 1.** Ta vërtetojmë identitetin $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

Zgjidhje. Do të nisemi prej anës së majtë të barazisë. Kemi:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \blacksquare\end{aligned}$$

➤ **Shembulli 2.** Ta vërtetojmë identitetin $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

Zgjidhje. Të theksojmë së pari se, nuk është në rregull të „shumëzojmë kryqas” deri sa nuk tregojmë se kjo barazi është identitet, duke pasur llogari për vlerat e lejuara të këndit:

$\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq -1$ d.m.th. $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Pasi asnjëra anë nuk është më e ndërlikuar se tjetra, një

lloj është se prej cilës anë do të nisemi. Le të nisemi prej anës së majtë:

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \blacksquare$$

2. I thjeshtojmë të dy anët e barazisë në veçanti duke shfrytëzuar transformime ekuivalente. Nëse është e mundshme të dy anët t'i transformojmë deri në shprehje të njëjtë, atëherë përfundojmë se barazia e dhënë është identitet.

➤ **Shembulli 3.** Ta vërtetojmë identitetin: $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \left(\frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \right)^2$.

$$\begin{aligned}\text{Zgjidhje. Kemi } \frac{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1} &= \left(\frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \left(\frac{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} \right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \blacksquare\end{aligned}$$

3. Nisemi prej ndonjë identiteti të njohur dhe me transformime identike algebrike dhe me formulat themelore përpiqemi ta fitojmë barazinë e dhënë.

➤ **Shembulli 4.** Ta vërtetojmë identitetin: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

Zgjidhje. Nëse në identitetin (1): $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, i fuqizojmë të dy anët fitojmë $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$. Nëse në të dy anët e barazisë e zbresim shprehjen $2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ e fitojmë identitetin e dhënë

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \blacksquare$$

➤ **Shembulli 5.** Ta thjeshtojmë shprehjen: $A = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Zgjidhje. Kemi:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 2 - 2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \frac{-(1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = -1 \blacksquare \end{aligned}$$

DETYRA.

Thjeshtoji shprehjet (1-5) duke pasur llogari për vlerat e lejuara të argumentit te ato:

1. $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha$;
2. $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$;
3. $\frac{1 + \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;
4. $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$;
5. $\frac{1 + \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

Vërtetoji identitetet (6-15) duke pasur llogari për vlerat e lejuara të këndit α :

6. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$;
7. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
8. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$;
9. $\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \cos^2 \alpha = 1$;
10. $\operatorname{ctg} \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \cos \alpha$;
11. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin^2 \alpha$;
12. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
13. $\sin^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$
14. $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} = \sin \alpha - \cos \alpha$;
15. $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \alpha$
16. $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2 \operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha = 2$;
17. $\frac{2}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}$

2.1.7. NJEHSIMI I VLERËS SË FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE SIPAS VLERËS SË NJËRËS PREJ TYRE

Me ndihmën e këtyre varësive trigonometrike (identitete) mundemi çdonjërin prej funksioneve trigonometrike ta shprehim nëpërmjet tjerave. Kjo na mundëson ta njehsojmë vlerën e funksioneve trigonometrike prej këndit të dhënë, nëse dihet vlera e njërit funksion trigonometrik prej atij këndi. Do ta tregojmë këtë nëpër disa shembuj.

➤ **Shembulli 1.** Është dhënë $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. T'i caktojmë vlerat e funksioneve tjera trigonometrike prej këndit α .

Zgjidhje. Prej identitetit themelor $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, gjejmë

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

(1)

Duke zëvendësuar $\cos \alpha$ prej (1) në identitetet (2) dhe (3) prej pikës 2.6. gjejmë:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}} \quad (2)$$

Gjatë njehsimit me ndihmën e formulave (1) dhe (2), prej të dy shenjave të mundshme, plus ose minus, zgjedhim njëren varësisht prej asaj në cilin kuadrant gjendet këndi. Në shembullin tonë, pasi këndi α është në kuadrantin II, në të cilin kosinusi, tangensi dhe kotangensi kanë vlera negative, për vlerën e dhënë $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, në formulat (1) dhe (2) do të marrim shenjë „-”. Kështu njehsojmë:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Është dhënë $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, për $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. T'i caktojmë vlerat e $\sin \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$; $\operatorname{ctg} \alpha$.

Zgjidhje. Sikurse edhe në shembullin paraprak, prej identiteteve themelor (1), (2) dhe (3) në 2.6. gjejmë:

$$\boxed{\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}} \quad (3)$$

Këndi α është në kuadrantin e tretë të i cili $\sin \alpha$ është negativ, kurse $\operatorname{tg} \alpha$ dhe $\operatorname{ctg} \alpha$ janë pozitiv. Prandaj te formulat (3) do të marrim shenjë „+” para rrënjëve dhe njehsojmë:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Nëse $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ dhe $\sin \alpha < 0$, t'i caktojmë vlerat e $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ dhe $\operatorname{ctg} \alpha$.

Zgjidhje. Pasi $\operatorname{tg} \alpha < 0$ në kuadrantin II dhe IV, kurse $\sin \alpha < 0$ në kuadrantin III dhe IV, vijon këndi α është në kuadrantin IV. Prej formulës (6) nga 2.6. gjejmë $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}$

Prej formulave (11) dhe (8) në 2.6. vijon:

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad (4)$$

Pasi sipas kushtit $\sin \alpha < 0$, kemi: $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{-\frac{5}{12}}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = -\frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = -\frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}} = -\frac{5}{13}$;

kurse në kuadrantin IV $\cos \alpha > 0$, pra kemi $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$ ■

► **Shembulli 4.** A mundet sinusi dhe kosinusi prej një këndi të njëjtë α të jenë të barabartë me:

a) $\frac{12}{13}$ dhe $-\frac{5}{13}$; b) $\frac{1}{3}$ dhe $-\frac{2}{3}$.

Zgjidhje. a) Për çfarëdo kënd α duhet të plotësohet identiteti themelor

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, pra ai duhet të vlen edhe për këtë kënd α , për të cilin sipas kushtit kemi $\sin \alpha = \frac{12}{13}$

dhe $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Pasi $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$, vijon se numrat $\frac{12}{13}$ dhe $-\frac{5}{13}$ mund të jenë vlerat e sinusit dhe kosinusit prej një këndi të njëjtë.

b) Për $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, prej identitetit themelor fitojmë: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$.

Vijon, numrat e dhënë nuk mund të jenë vlerat e sinusit dhe kosinusit prej këndit të njëjtë α ■

DETYRA

1. Nëse dihet vlera e njërit prej funksioneve trigonometrike prej këndit të dhënë vendosi në tabelë djathtas varësitë tjera me funksionet tjera trigonometrike.

2. Është dhënë $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

3. Është dhënë $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{24}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

4. Njehso vlerën e shprehjes

$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ nëse është $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{9}$.

6. Njehso vlerën e shprehjes:

$\frac{8 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{6 \operatorname{tg} \alpha - 5 \operatorname{ctg} \alpha}$, nëse $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ dhe $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

8. Njehso vlerën e shprehjes $\frac{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}$, nëse $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

9. Gjeje $\sin \alpha$ dhe $\cos \alpha$ nëse: $3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 5$.

5. Vërteto barazinë:

$\frac{3 \cos \alpha + \sin \alpha}{3 \operatorname{ctg} \alpha - 4 \operatorname{tg} \alpha} = 3$, nëse $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dhe $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

7. Shprehe nëpërmjet $\operatorname{tg} \alpha$ shprehjen $\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

I dhënë →	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$	/	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$		
$\cos \alpha$		/		
$\operatorname{tg} \alpha$			/	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$				/

2.1.8. VETITË THEMELORE TË FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

1. Periodizimi i funksioneve trigonometrike. Vetia themelore e funksioneve trigonometrike është veti e periodizimit.

Përkufizimi 1. Funksioni $y=f(x)$ i përkufizuar në bashkësinë D është periodik nëse ekziston numër real $T \neq 0$ i atillë që

$$1^\circ \text{ për çdo } x \in D \text{ dhe } x \pm T \in D;$$

$$2^\circ f(x \pm T) = f(x).$$

(1)

Numrin T që i plotëson kushtet 1° dhe 2° e quajmë periodë të funksionit.

Teorema 1. Nëse T është periodë e funksionit $f(x)$, atëherë edhe numrat e formës kT , $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ janë perioda të $f(x)$.

Vërtetim. Le të jetë $T > 0$ periodë për $f(x)$, përkatësisht $f(x+T)=f(x)$. Atëherë

$$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x), \forall x \in D,$$

prej ku vijon se $2T$ është periodë për $f(x)$. Gjithashtu

$$f(x-2T)=f((x-T)-T)=f(x-T)=f(x), \forall x \in D.$$

që do të thotë se $-2T$ është periodë për $f(x)$. Analogjikisht, duke zbatuar disa herë (1) tregohet se edhe $\pm 3T, \pm 4T, \dots, kT$ ($k \in \mathbb{Z}$) janë perioda për $f(x)$, që duheshite ta vërtetojmë ♦

Numrin më të vogël pozitiv që e ka vetinë (1) e quajmë **perioda themelore** për $f(x)$.

Teorema 2. Funksionet trigonometrike sinus, kosinus, tangens dhe kotangens janë periodike me periodën e përgjithshme $2\pi(n \cdot 360^\circ)$. Perioda themelore për $\sin \alpha$ dhe $\cos \alpha$ është $2\pi(360^\circ)$, kurse për $\operatorname{tg} \alpha$ dhe $\operatorname{ctg} \alpha$ është π (180°).

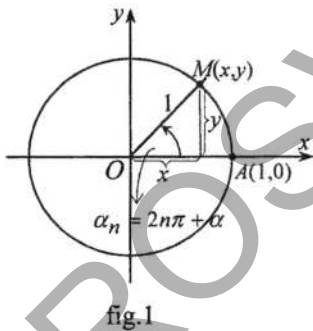


fig.1

Vërtetim. Në pikën 2.1. vërejtëm se këndet $\alpha_n = \alpha + n \cdot 360^\circ$, ku $0 \leq \alpha < 360^\circ$ dhe $n \in \mathbb{Z}$, kanë krah fillesatër të përbashkët OA dhe krah të mbarimit të përbashkët OM (fig.1). Atëherë, sipas përkufizimit të sinusit dhe kosinusit, kemi:

$$\sin(\alpha + n \cdot 360^\circ) = y = \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + n \cdot 360^\circ) = x = \cos \alpha, \quad (3)$$

ose në madhësinë radiale

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = y = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = x = \cos \alpha.$$

Të tregojmë se perioda themelore për $\sin \alpha$ është 2π . Të supozojmë se ekziston tjetër numër T , $0 < T < 2\pi$, për të cilin vlen edhe barazia $\sin(\alpha + T) = \sin \alpha$.

Pasi barazia e fundit duhet të vlen për çfarëdo kënd, ta marrim për shembull këndin $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Atëherë, prej (1) vijon: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Nga ana tjetër sipas fig. 2: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T$, pra vijon $\cos T = 1$, kurse kjo është e mundur vetëm për $T = 0$ ose $T = 2\pi$, që është e kundërta e supozimit $0 < T < 2\pi$.

Analogjikisht vërtetohet se perioda themelore për kosinusin është 2π . Përpiku të vërtetosh vet.

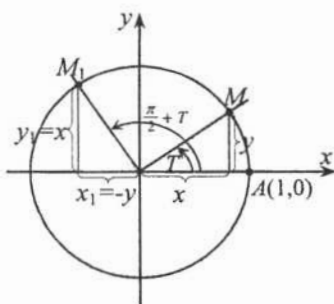


fig.2

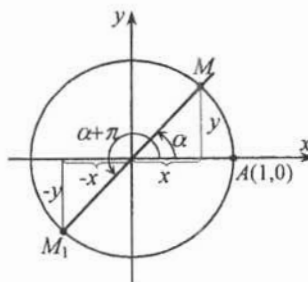


fig.3

shqyrtime analoge, sipas fig. 3, fitojmë se funksionet tangens dhe kotangens janë funksione periodike dhe për ato vlen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \right\} \quad \text{ose} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

➤ **Shembulli 1.** Të vërtetojmë se $\sin 420^\circ = \sin 780^\circ = \sin(-1020^\circ)$.

Zgjidhje. Prej formulës (2) kemi: $\sin 420^\circ = \sin(60^\circ + 360^\circ) = \sin 60^\circ$;

$\sin 780^\circ = \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ$ dhe $\sin(-1020^\circ) = \sin(60^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ$, prej ku vijon barazia e dhënë. ■

➤ **Shembulli 2.** Të tregojmë se $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{12} = \operatorname{tg} \frac{37\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(-\frac{35\pi}{12} \right)$.

Zgjidhje. Pasi $\frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \pi$, $\frac{37\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + 3\pi$, $-\frac{35\pi}{12} = \frac{\pi}{12} - 3\pi$, prej formulave (4) kemi:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} + \pi \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} + 3\pi \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} - 3\pi \right). \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Të provojmë a është e saktë barazia $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg} 1830^\circ$.

Zgjidhje. Pasi $330^\circ = 30^\circ - 1 \cdot 360^\circ$, $1830^\circ = 30^\circ + 5 \cdot 360^\circ$, për shkak të periodizimit të kotangensit kemi: $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(30^\circ - 360^\circ) = \operatorname{ctg}(30^\circ + 5 \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg} 1830^\circ$ ■

2. Funksionet trigonometrike çift dhe tek.

Përkufizimi 2. Për bashkësinë $D \subseteq \mathbb{R}$ themi se është **bashkësi simetrike** nëse për çdo $x \in D$ dhe $-x \in D$.

Përkufizimi 3. Nëse $f(x)$ është funksion i përcaktuar në bashkësinë simetrike D dhe për çdo $x \in D$ vlen:

1° $f(-x) = f(x)$, atëherë $f(x)$ është funksion çift;

2° $f(-x) = -f(x)$, atëherë $f(x)$ funksioni është tek.

Nëse $f(x)$ nuk plotëson asnjërin nga kushtet e sipërm, ai nuk është as çift as tek.

Për shembull, funksionin katror $f(x) = x^2$, që e mësove në vitin e kaluar shkollor, është funksion çift, kurse funksioni linear $f(x) = ax$ është funksion tek.

Teorema. Kosinusi është funksion **çift**, d.m.th. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, kurse sinusi, tangensi dhe kotangensi janë funksione **tek**, d.m.th.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

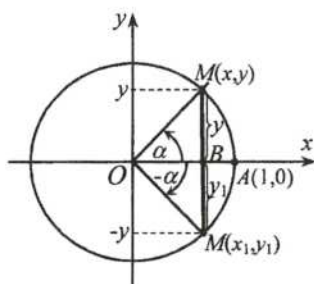


fig.4

Vërtetim. Pikat $M(x, y)$ dhe $M_1(x_1, y_1)$ nga vija rrethore trigonometrike (fig. 4), që i përcaktojnë këndet reciprokisht të kundërt α dhe $-\alpha$ janë simetrike në lidhje me boshtin Ox dhe kanë abshisa të njëjta, d.m.th. $x = x_1 = \overline{OB}$, dhe ordinata reciprokisht të kundërta $y_1 = -y$, prej ku vijon:

$$\cos(-\alpha) = x_1 = x = \cos \alpha \quad (1)$$

$$\sin(-\alpha) = y_1 = -y = -\sin \alpha. \quad (2)$$

Për funksionin $\operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ sipas fig.5a, fitojmë:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = Y_1 = -Y = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Analogjikisht për $\operatorname{ctg} \alpha$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sipas fig.5b, kemi :

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = X_1 = -X = -\operatorname{ctg} \alpha \quad \blacklozenge$$

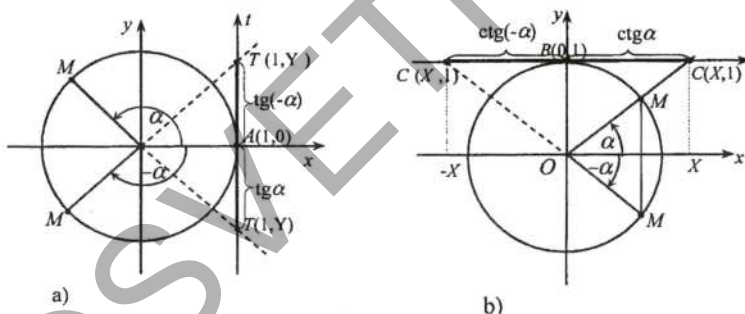


Fig. 5

➤ **Shembulli 4.** Të vërtetojmë se funksioni $f(x) = x \cdot \sin x$ është funksion çift.

Zgjidhje. Pasi $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x)$, sipas përkufizimit 2° , funksioni i dhënë është çift. ■

➤ **Shembulli 5.** Ta shqyrtojmë funksionin çift për $f(x) = \frac{1 + \cos x}{x}$.

Zgjidhje. Kemi: $f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{(-x)} = -\frac{1 + \cos x}{x} = -f(x)$. Pasi $f(-x) = -f(x)$, përfundojmë se funksioni i dhënë është tek.

► **Shembulli 6.** Të vërtetojmë se funksioni $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ nuk është as çift as tek.

Zgjidhje. Kemi: $f(-x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(-x)}{1 + \operatorname{tg}(-x)} = \frac{1 - (-\operatorname{tg} x)}{1 + (-\operatorname{tg} x)} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ dhe $-f(x) = -\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

Domethënë $f(-x) \neq -f(x)$, por edhe $f(-x) \neq f(x)$, d.m.th. funksioni i dhënë nuk është as çift as tek. ■

3. Monotonia e funksioneve trigonometrike. Kjo është njëra nga vetitë më të rëndësishme të funksioneve, që zakonisht e shqyrtojmë gjatë të studiuarit e tyre, me të cilën u njohe edhe gjatë shqyrtimit të funksionit eksponencial dhe logaritmik.

Teorema 1. Në intervalin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sinusi monotonisht rritet prej 0 deri te 1, kurse kosinusi monotonisht zvogëlohet prej 1 deri te 0.

Vërtetim. Duhet të vërtetojmë: nëse $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin \alpha_1 < \sin \alpha_2 \leq 1 \\ 1 \geq \cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 \geq 0 \end{cases}$

Do t'i vërtetojmë këto jobarazi me ndihmën e gjykimeve vijuese prej gjeometrisë:

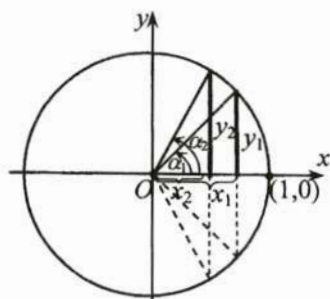


fig.6

1° këndit më të madh qendror në vijën rrethore i përgjigjet kordë më e madhe;

2° prej dy kordave më e madhja është më afër deri te qendra.

Sipas fig.6, $y_1 = \sin \alpha_1$, $y_2 = \sin \alpha_2$, prej ku $2y_1 = 2 \sin \alpha_1$,

$2y_2 = 2 \sin \alpha_2$. Pasi $2y_1$ dhe $2y_2$ janë gjatësitë e kordave që u përgjigjen

këndeve qendror $2\alpha_1$ dhe $2\alpha_2$, në pajtim me gjykimin 1°,

vlejnë implikacionet $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_1 < 2\alpha_2 \Rightarrow 2y_1 < 2y_2 \Rightarrow$

$2 \sin \alpha_1 < 2 \sin \alpha_2$, d.m.th. $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$, kurse për shkak $\sin 0 = 0$ dhe

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, vijon se në intervalin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sinusi monotonisht rritet prej 0

deri te 1. Gjithashtu, pasi $x_1 = \cos \alpha_1$, $x_2 = \cos \alpha_2$, në pajtim me gjykimin

2° kemi:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_1 < 2\alpha_2 \Rightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow \cos \alpha_1 > \cos \alpha_2, \text{ dhe } \cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

prej ku vijon se në intervalin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kosinusi monotonisht zvogëlohet prej 1 deri në 0 ♦

Monotoninë e sinusit dhe kosinusit në tre kuadrantët tjerë e konstatojmë në të njëjtën mënyrë. Këtë mund ta ilustrojmë, për shembull, me figurat 7 dhe 8. Kështu për shembull, prej fig. 7 vërejmë se kur krahu i dytë i këndit rrotullohet në kahen „+”, duke përkthyer kënde në kuadrantin II dhe III, pika M e përkthyer gjysmëvijën rrethore të majtë, kurse projekcioni i saj në boshtin y e përkthyer diametrin vertikal BB_1 prej lartë poshtë, d.m.th. $y = \sin \alpha$ zvogëlohet prej 1 deri në -1 . Kur krahu i dytë i këndit i përkthyer këndet prej gjysmërafshit të djathtë, d.m.th. pika M e përkthyer gjysmëvijën rrethore të djathtë (kuadranti IV dhe I), projekcioni i saj e përkthyer diametrin vertikal B_1B prej poshtë-lartë, d.m.th.

$y = \sin \alpha$ rritet prej -1 deri në 1 . Domethënë, funksioni $\sin \alpha$ rritet në intervalet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dhe $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ të cilët mund t'i shkruajmë me një interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, kurse monotonisht zvogëlohet në intervalin $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Për shkak të periodizimit të $\sin \alpha$ dhe $\cos \alpha$, vlejné gjykimet që vijnë më poshtë:

Teorema 5. Funksioni $\sin \alpha$ monotonisht rritet prej -1 deri më 1 në çdo interval $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, kurse monotonisht zvogëlohet prej 1 deri në -1 në çdonjërin prej intervaleve $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 6. Funksioni $\cos \alpha$ monotonisht zvogëlohet prej 1 deri në -1 në çdonjërin interval $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, kurse monotonisht rritet prej -1 deri në 1 në çdonjërin prej intervaleve $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

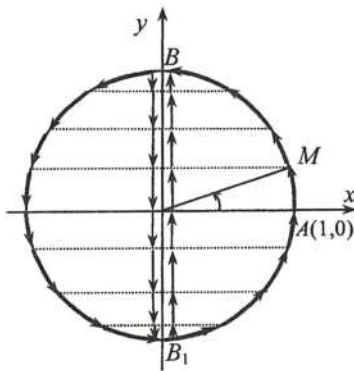


fig.7

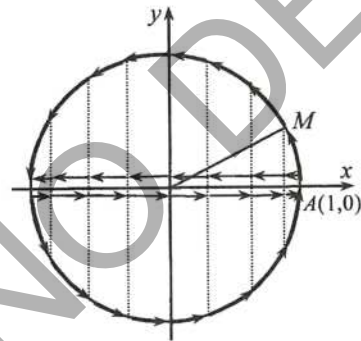


fig.8

Teorem

a 7. Në intervalin $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funksioni tangens monotonisht rritet, kurse funksioni kotangens monotonisht zvogëlohet.

Vërtetim. Le të jetë $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Prej $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$ dhe $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ d.m.th.

$\frac{1}{\cos \alpha_1} < \frac{1}{\cos \alpha_2}$, vijon $\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} < \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2}$ përkatësisht $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$, që do të thotë se tangensi rritet në $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Gjithashtu, prej $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$ d.m.th. $\frac{1}{\sin \alpha_1} > \frac{1}{\sin \alpha_2}$ dhe $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ vijon

$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} > \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2}$, përkatësisht $\operatorname{ctg} \alpha_1 > \operatorname{ctg} \alpha_2$, që do të thotë se kotangensi zvogëlohet në kuadrantin I,

d.m.th. në intervalin $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Këtë gjykim mund ta vërtetojmë edhe gjeometrikisht. Sipas fig. 9, edhe gjykimi: „këndit më të madh në trekëndësh i përgjigjet brinja më e madhe” kemi:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Y_1 < Y_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$$

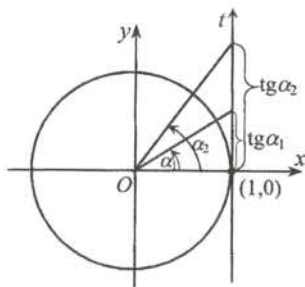


fig.9

Në mënyrë të ngjashme, me ndihmën e fig 10, gjeometrikisht, tregojmë se kotangensi zvogëlohet në intervalin $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ♦

Me ndihmën e figurave 11 dhe 12 mund t'i vërejmë edhe këto gjykime:

Teorema 8. Funkcioni $\operatorname{tg} \alpha$ monotonisht rritet prej $-\infty$ deri $+\infty$ në intervalin $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, por për shkak të periodizimit edhe në çdo interval $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 9. Funkcioni $\operatorname{ctg} \alpha$ monotonisht zvogëlohet prej $+\infty$ deri $-\infty$ në intervalin $(0, \pi)$ por për shkak të periodizimit edhe në çdo interval $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

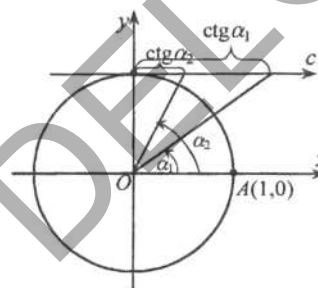


fig.10

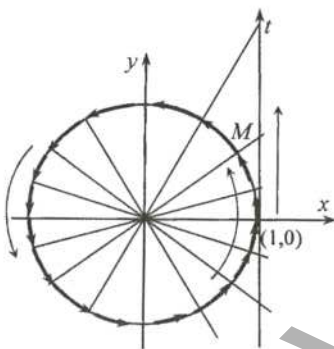


fig.11

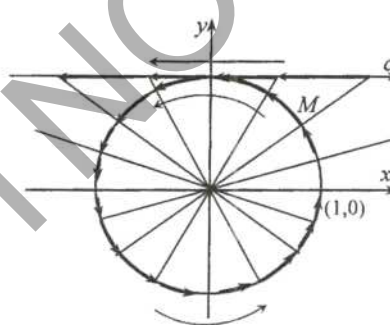


fig.12

► **Shembulli 7.** Pa i njehsuar vlerat, t'i krahasojmë sipas madhësisë numrat: a) $\sin 190^\circ$ dhe $\sin 255^\circ$; b) $\cos 275^\circ$ dhe $\cos 1000^\circ$; c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$ dhe $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$; ç) $\operatorname{ctg}(-230^\circ)$ dhe $\operatorname{ctg}(-265^\circ)$.

Zgjidhje. a) Pasi $190^\circ, 225^\circ \in (180^\circ, 270^\circ)$ dhe $190^\circ < 225^\circ$, kurse sinusi zvogëlohet në kuadrantin III, vijon $\sin 190^\circ > \sin 255^\circ$.

b) këndet prej 275° dhe $1000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$ janë në kuadrantin IV në të cilin kosinusi rritet, pra prej $275^\circ < 280^\circ$, vijon $\cos 275^\circ < \cos 1000^\circ$.

c) pasi $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ dhe $\frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{6}$, kurse tangensi rritet, vijon $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} < \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$.

ç) $-265^\circ, -230^\circ$ janë kënde prej kuadrantit II në të cilin tangensi zvogëlohet, pra prej $-265^\circ < -230^\circ$ vijon $\operatorname{ctg}(-265^\circ) > \operatorname{ctg}(-230^\circ)$.

1. Duke e shfrytëzuar periodizimin e funksioneve trigonometrike vërteto se:

a) $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ$; b) $\sin \frac{25\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$; c) $\operatorname{tg}(-860^\circ) = \operatorname{tg} 40^\circ$; ç) $\operatorname{ctg} 2525^\circ = \operatorname{ctg} 5^\circ$
 d) $\cos \frac{13\pi}{6} = \cos \frac{25\pi}{6} = \cos(-\frac{23\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6}$

2. Provo a është periodik funksioni: a) $y = 1 - \sin x$; b) $y = 2 + \operatorname{ctg} x$; c) $y = 3 + \cos x$.

3. Cilët prej këtyre funksioneve janë çift, cilët janë tek, e cilët janë as çift as tek:

a) $y = x^2 + \cos x$; b) $y = 5 - \sin x$; c) $y = \operatorname{tg}|x|$; ç) $y = x^3 + \operatorname{tg} x$; d) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x$; e) $y = \operatorname{ctg} x + \cos x$.

4. Vërteto se prodhimi prej:

- a) dy funksioneve çift është funksion çift;
 b) dy funksioneve tek është funksion çift;
 c) një funksion çift dhe një funksion tek është funksion tek.

5. Pa i njehsuar vlerat radhiti sipas madhësisë këta numra:

a) $\sin 235^\circ, \sin 18^\circ, \sin 359^\circ, \sin 133^\circ$; b) $\cos \frac{3\pi}{4}, \cos \frac{7\pi}{6}, \cos 0, \cos \frac{11\pi}{12}$; c) $\operatorname{tg} 0^\circ, \operatorname{tg} 277^\circ, \operatorname{tg} 14^\circ, \operatorname{tg} 120^\circ$;
 ç) $\operatorname{ctg} 24^\circ, \operatorname{ctg} 215^\circ, \operatorname{ctg} 110^\circ, \operatorname{ctg} 350^\circ$; d) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}, \operatorname{tg} 0, \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$

6. Pa e njehsuar vlerën e saktë cakto shenjën e ndryshimit:

a) $\sin 153^\circ - \sin 73^\circ$ b) $\cos 234^\circ - \sin 33^\circ$ c) $\operatorname{tg} 74^\circ - \operatorname{tg} 174^\circ$
 ç) $\operatorname{ctg} 37^\circ - \operatorname{ctg} 301^\circ$ d) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$ e) $\cos \frac{7\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{4}$

7. Pa e njehsuar vlerën cakto shenjën e herësit:

a) $\frac{\operatorname{tg} 254^\circ - \operatorname{tg} 285^\circ}{\sin 213^\circ - \sin 217^\circ}$; b) $\frac{\cos 27^\circ - \cos 23^\circ}{\operatorname{ctg} 328^\circ - \operatorname{ctg} 341^\circ}$; c) $\frac{\sin 190^\circ - \cos 155^\circ}{\operatorname{tg} 118^\circ - \operatorname{ctg} 138^\circ}$

2.1.9. SJELLJA E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI NË FUNKSIONE TRIGONOMETRIKE PREJ KËNDIT TË NGUSHTË

Vërejtëm se çfarëdo këndi të orientuar mund ta paraqesim në formën:

$$\alpha + k \cdot 360^\circ \quad (\alpha + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{kurse } \alpha \text{ është kënd elementar.} \quad (1)$$

Pasi funksionet trigonometrike janë funksione periodike, njehsimi i vlerave të tyre për çfarëdo kënd sillet në njehsimin e funksioneve trigonometrike prej këndeve elementare.

Tani do të shikojmë se si funksionet trigonometrike prej çfarëdo këndi elementar i shprehim me funksione trigonometrike prej këndit të ngushtë pozitiv. Kjo do të na mundëson t'i njehsojmë vlerat e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi duke i ditur vlerat e tyre për këndet e ngushtë pozitiv.

Le të jetë α kënd në pozitën standarde, por nuk është kënd kudrantësh.

Përkufizimi. Këndin e ngushtë pozitiv α_R për të cilin është mënjeluar këndi α prej boshtit x e quajmë **kënd referent** për këndet α .

Në pajtim me përkufizimin, çfarëdo kënd elementar α mund ta shkruajmë në formën:

$180^\circ - \alpha_R(\pi - \alpha_R)$ (fig. 1a); $180^\circ + \alpha_R(\pi + \alpha_R)$ (fig. 1b) ose $360^\circ - \alpha_R(2\pi - \alpha_R)$ (fig. 1c)

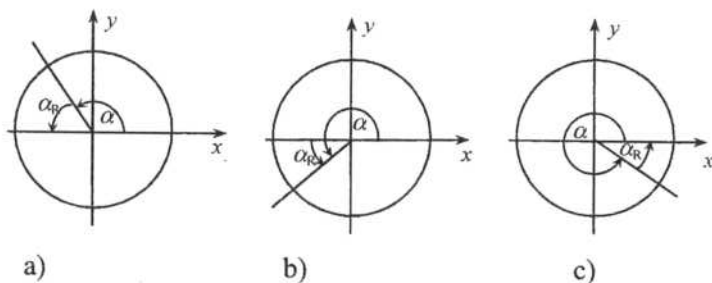


fig.1

c) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ është kënd në kuadrantin IV dhe $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, vijon $\alpha_R = \frac{\pi}{3}$ (fig.1c) ■

➤ **Shembulli 1.** T'i caktojmë

këndet referente për këndet:

a) $\alpha = 150^\circ$; b) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; c) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

Zgjidhje. a) Pasi

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ,$$

vijon $\alpha_R = 30^\circ$ (fig.1a);

b) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ është kënd në kuadrantin III

dhe $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, pra $\alpha_R = \frac{\pi}{6}$ (fig.11);

➤ **Shembulli 2.** T'i caktojmë vlerat e funksioneve trigonometrike për këndet:

a) $\sin 160^\circ$; b) $\cos 200^\circ$; c) $\tan 340^\circ$

Zgjidhje. a) $\alpha = 160^\circ$ është kënd në kuadrantin II dhe $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ$, pra $\alpha_R = 20^\circ$.

Krahët e mbarimit për këndet prej 20° dhe 160° janë simetrik në lidhje me boshtin y dhe e prejnë vijën rrethore trigonometrike në pikat $M(x, y)$ dhe $M_1(-x, y)$ të cilët janë simetrik në lidhje me boshtin y (fig. 2), prej ku vijon:

$$\sin 160^\circ = y = \sin 20^\circ \text{ d.m.th. } \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ.$$

b) Pasi $\alpha = 200^\circ = 180^\circ + 20^\circ$, vijon $\alpha_R = 20^\circ$. Krahët e mbarimit të α dhe α_R e prejnë vijën rrethore në pikat $M(x, y)$ dhe $M_1(-x, -y)$ të cilët janë simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave (fig. 3), pra kemi: $\cos 200^\circ = -x = -\cos 20^\circ$ d.m.th. $\cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$.

c) Me shqyrtime të ngjashme sikurse nën a) dhe b), me ndihmën e fig. 4, fitojmë $\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ) = -Y = -\tan 20^\circ$ ■

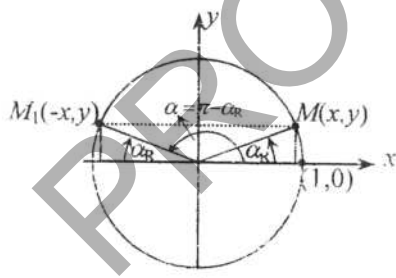


fig.2

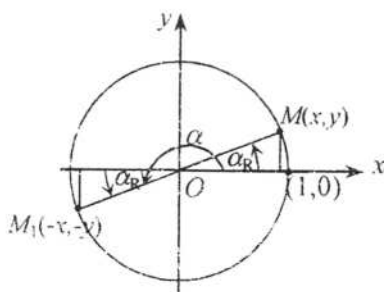


fig.3

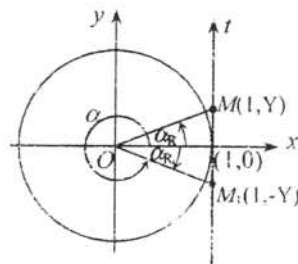


fig.4

Rezultatet prej shembullit 1 vijnë për rastin e çfarëdo këndi. Nëse α është çfarëdo kënd prej formës

$$\alpha = 180^\circ \pm \alpha_R \quad (\pi \pm \alpha_R) \text{ ose } \alpha = 360^\circ \pm \alpha_R \quad (2\pi \pm \alpha_R)$$

atëherë vlejné këto **formula për reduktim**:

$$\sin \alpha = \pm \sin \alpha_R; \quad \cos \alpha = \pm \cos \alpha_R; \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \operatorname{tg} \alpha_R;$$

(1)

Zgjedhja e shenjës, „+” ose „-”, varet prej asaj në cilin kuadrant është këndi α dhe si është shenja e funksionit përkatës në atë kuadrant.

Gjykimi i shprehur me formulat (1) paraqet **rregullën I për reduktimin e vlerave të funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi në kënd të ngushtë** e shprehur me fjalë thotë:

Vlerat e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi α janë të barabarta me vlerat e funksioneve të njëjta trigonometrike prej këndit përkatës referent α_R , të marra me shenjën „+” ose „-” në pajtim me atë në cilin kuadrant është këndi α dhe si është shenja e funksionit në atë kuadrant.

Këndi f-ni	$\pi - \alpha$ $180^\circ - \alpha$	$\pi + \alpha$ $180^\circ + \alpha$	$2\pi - \alpha$ $360^\circ - \alpha$	$2\pi + \alpha$ $360^\circ + \alpha$
sin	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Për shfrytëzim më të lehtë, formulat për reduktim, të shprehura me barazitë (1) i vendosim në tabelë (tabela 1).

Tabela 1.

➤ **Shembulli 3.** Me ndihmën e rregullës për reduktim t'i caktojmë vlerat e

$$\text{a) } \alpha = -300^\circ, \quad \text{b) } \alpha = \frac{21\pi}{4}.$$

Zgjidhje. a) Për shkak të sinusit që është tek: $\sin(-300^\circ) = -\sin 300^\circ$ dhe $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$, pra në pajtim me rregullën për reduktim kemi: $\sin(-300^\circ) = -\sin(360^\circ - 60^\circ) = -(-\sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Në

mënyrë të ngjashme: $\cos(-300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}(-300^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{b) Kemi } \frac{21\pi}{4} = \frac{16\pi + 5\pi}{4} = 4\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ dhe } \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}, \text{ d.m.th. } \alpha_R = \frac{\pi}{4}. \text{ Pasi } \alpha = \frac{21\pi}{4} \text{ është}$$

kënd prej kuadrantit III, në të cilin $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ janë numra pozitiv, kurse $\sin \alpha$ dhe $\cos \alpha$ janë numra negativë sipas formulave për reduktim fitojmë:

$$\sin \frac{21\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \frac{21\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1; \quad \operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$$

➤ **Shembulli 4.** Me ndihmën e rregullës për reduktim dhe tabelës 1, të formojmë tabelë për vlerat e funksioneve trigonometrike prej këndeve ku këndi referent është 30° .

Zgjidhje: Nëse në tabelën 1 vëndojmë $\alpha = 30^\circ$ do ta fitojmë tabelën për vlerat e funksioneve trigonometrike të këndeve prej $150^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 390^\circ$ (tabela 2)

këndi f-ni	150° $180^\circ - 30^\circ$	210° $80^\circ + 30^\circ$	330° $360^\circ - 30^\circ$	390° $360^\circ + 30^\circ$
sin	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
ctg	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Tabela 2

Përveç formulave për reduktim (1), shpeshherë është praktike vlerat e funksioneve trigonometrike prej këndit të dhënë ti shprehim nëpërmjet vlerës së tij prej këndit të ngushtë α për të cilin këndi i dhënë është i mënjeluar prej boshtit të ordnatës. Ato janë kënde të formës:

$$90^\circ \pm \alpha \left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right) \text{ ose } 270^\circ \pm \alpha \left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha \right). \quad (3)$$

Për funksionet trigonometrike prej këndeve të formës (3) vlejné formulat të vendosura në tabelën 3, të cilat i fitojmë në bazë të rregullës, të njohur si

këndi f-ni	$\frac{\pi}{2} - \alpha$ $90^\circ - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$ $90^\circ + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$ $270^\circ - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ $270^\circ + \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Tabela 3

Rregulla II për reduktim. Vlerat e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi, i mënjeluar prej boshtit të ordnatës për këndin e ngushtë α , janë të barabartë me vlerat e kofunksioneve të tyre prej këndit të ngushtë α , të marrura me shenjën „+” ose „-” në pajtim me atë në cilin kuadrant është këndi dhe si është shenja e funksionit në atë kuadrant.

për reduktim prej tabelës 3, t'i caktojmë vlerat:

a) $\sin 120^\circ$; b) $\cos 225^\circ$; c) $\operatorname{tg} 315^\circ$.

Zgjidhje. Kemi: a) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\operatorname{tg} 315^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

➤ **Shembulli 6.** Pa e njehsuar vlerën e saktë ta caktojmë shenjën e $\cos 135^\circ - \sin 152^\circ$

Zgjidhje. Prej $\sin 152^\circ = \sin(90^\circ + 62^\circ) = \cos 62^\circ$ dhe $\cos 135^\circ - \sin 152^\circ = \cos 135^\circ - \cos 62^\circ$, pasi $62^\circ, 135^\circ \in (0^\circ, 180^\circ)$ dhe $62^\circ < 135^\circ$, kurse kosinusi zvogëlohet, vijon $\cos 62^\circ > \cos 135^\circ$, prej ku fitojmë $\cos 135^\circ - \sin 152^\circ = \cos 135^\circ - \cos 62^\circ < 0$

1. Cakto vlerën e funksionit trigonometrik për këndet: a) 150° ; b) $\frac{7\pi}{6}$; c) 315° .

2. Kompletotoje tabelën

këndi f-ni	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
sin		$\frac{\sqrt{2}}{2}$			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
tg	-1				
ctg			1		

Njihso vlerën e shprehjeve (3-5):

$$3. 2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - 2 \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$4. \sin 150^\circ + \cos 225^\circ - \operatorname{tg} 300^\circ + \operatorname{ctg} 405^\circ$$

$$5. 2 \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} - 3 \cos \frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Thjeshtoji shprehjet (6-10) ($0 < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)):

$$6. \sin(90^\circ + \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$$

$$7. \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - \pi) - \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 2\pi)$$

$$9. \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\cos(2\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha)} \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$$

$$8. \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)}$$

$$10. \frac{\sin(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)} \cdot \frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)}$$

Vërtetotoji identitetet (11-15); ($0 < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)):

$$11. \sin(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$12. \frac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \cos(270^\circ - \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(270^\circ - \alpha)} = \sin \alpha$$

$$13. \frac{\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)}{1 + \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)} = -\cos \alpha$$

$$14. \frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$15. \frac{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \cdot \cos(360^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \sin(-\alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)} = \sin \alpha$$

REGIOMONTANUS, i njohur si **JOHAN MILER** (Müller Johannes) (1436-1476) – matematikan dhe astronom gjerman i njohur me veprën *Për trekëndëshat*. Është i merituar për bartjen e njohurive të grekëve dhe arabëve të vjetër në matematikë. Ai është origjinal sipas mënyrës së parashtrimit të përmbajtjeve prej matematikës dhe njihet për themelues në trigonometrinë e përdimit.

2.2. GRAFIKU I FUNKSIONIT TRIGONOMETRIK

Deri këtu funksionet trigonometrike i shqyrtoam si funksione prej këndeve, të matur në shkallë dhe radianë. Pasi çdo kënd qendror i përgjigjet hark rrethor i formuar prej krahëve të këndit, funksionet trigonometrike mund t'i shqyrtojmë edhe si funksione të harqeve rrethore. Megjithatë, në matematikë dhe disiplinat tjera, paraqiten probleme në të cilët ballafaqohemi me funksione trigonometrike prej argumentit numerik i cili nuk është e thënë të ketë ndonjë rëndësi konkrete gjeometrike (kënd, hark) por mund të paraqet madhësi të natyrës së ndryshme, si për shembull, koha, temperatura, etj. Prej atje edhe nevoja të përkufizojmë dhe shqyrtojmë funksione trigonometrike prej argumentit numër real.

Përkufizimi. Nëse t është numër real, atëherë $\sin t = \sin \alpha$, ku α është kënd madhësia e të cilit është t radianë.

Analogjikisht, funksionet $\cos$, $\tan$ dhe $\cot$ i përcaktojmë si vlera të funksioneve trigonometrike përkatëse prej këndit α me madhësi t radianë.

Për shembull, simboli $\sin 2$ paraqet vlerën e sinusit prej këndit ku madhësia radiale është 2, përkatësisht $\sin 2 = \sin(2 \text{ radian})$, $\tan 1,5 = \tan(1,5 \text{ radianë})$, etj.

Të studiuarit e funksionit ka për qëllim të konstaton në cilën mënyrë ndryshon funksioni kur argumenti ndryshon në bashkësinë e përkufizimit të funksionit. Ato ndryshime të funksionit i quajmë **vijimi i funksionit**, kurse mënyrën për konstatimin e këtyre ndryshimeve e quajmë *shqyrtimi i funksionit*. Vijimin e funksionit $y = f(x)$, $x \in D$, e paraqesim me grafikun e tij $G_f = \{(x, y) / y = f(x), x \in D\}$.

Pasi zakonisht ndryshoren e pavarur e shënojmë me shkronjën x , kurse grafikun e funksionit e paraqesim gjeometrikisht në sistemin kënddrejtë koordinativ xOy , prandaj edhe tani argumentin numerik të funksioneve trigonometrike do ta shënojmë me x . Domethën, do t'i shqyrtojmë funksionet

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x \text{ dhe } y = \cot x.$$

2.2.1. VIJIMI DHE GRAFIKU I FUNKSIONEVE ELEMENTARE TRIGONOMETRIKE

1. Vijimi dhe grafiku i funksionit $y = \sin x$. Të përkujtohem në vetitë e sinusit që deri më tani i konstatuam, por tani të shprehura për argumentin numër real.

1° Bashkësia e përkufizimit. Funksioni $y = \sin x$ është përkufizuar për çfarëdo numër real x , d.m.th. $D_{\sin x} = \mathbb{R}$.

2° Bashkësia e vlerave. Pasi $-1 \leq \sin x \leq 1$, për çdo $x \in \mathbb{R}$, bashkësia e vlerave për funksionin $y = \sin x$ është intervali $V_{\sin x} = [-1, 1]$.

3° Periodizimi. Sinusi është funksion periodik, d.m.th. për çfarëdo $x \in \mathbb{R}$ vlen

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}.$$

Perioda themelore është $T = 2\pi$.

4° Çift dhe tek. Sinusi është funksion tek, përkatësisht vlen

$$\sin(-x) = -\sin x, \text{ për çdo } x \in R.$$

5° Zerot e funksionit. $\sin x = 0$ për $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ dhe $x_3 = 2\pi$ në intervalin $[0, 2\pi]$, por për shkak të periodizimit për $x = k\pi$ ($k \in Z$) në intervalin $(-\infty, +\infty)$. Vijon grafiku i funksionit e pren boshtin x në pikat $(k\pi, 0)$, $k \in Z$.

6° Shenja. $\sin x > 0$, për $x \in (0, \pi)$ kurse për shkak të periodizimit edhe për $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in Z$;

$$\sin x < 0, \text{ për } x \in (\pi, 2\pi), \text{ përkatësisht për } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in Z.$$

7° Intervalet e rritjes dhe zvogëlimit. Sinusi monotonisht rritet prej -1 deri në 1 në intervalet $[0, \frac{\pi}{2}]$ dhe $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, por për shkak të periodizimit edhe në të gjitha intervalet $[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ dhe $[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ ($k \in Z$); sinusi monotonisht zvogëlohet prej 1 deri në -1 në intervalin $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, por për shkak të periodizimit edhe të çdo intervali $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in Z$).

8° Vlerat ekstreme. Në intervalin themelor $[0, 2\pi]$, sinusi e arrinë **maksimumin** e vet $y = 1$ d.m.th. $\sin x = 1$ për $x = \frac{\pi}{2}$ dhe **minimumin** $y = -1$ d.m.th. $\sin x = -1$ për $x = \frac{3\pi}{2}$.

Në tërë fushën e përkufizimit $\sin x = 1$ për $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kurse $\sin x = -1$ për $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Minimumin dhe maksimumin i quajmë **vlera ekstreme** për funksionin.

9° Grafiku. Për shkak të vetisë së periodizimit të funksionit $y = \sin x$, mjafton ta skicojmë grafikun të çdo intervali që e përfshin periodën themelore të sinusit, $T = 2\pi$. Prandaj së pari e skicojmë grafikun e $\sin x$ në intervalin $[0, 2\pi]$, kurse pastaj edhe në intervalin $(-\infty, +\infty)$. Skicën e grafikut të funksionit mund ta bëjmë në dy mënyra:

I. me ndihmën e tabelave të vlerave të funksionit, dhe

II. gjeometrisht, me ndihmën e vijës rrethore trigonometrike.

Do t'i shqyrtojmë të dy mënyrat.

Mënyra I. Formojmë tabelë në të cilën i vendosim **vlerat karakteristike** (zerot dhe ekstremet) të funksionit $\sin x$ në intervalin $[0, 2\pi]$ dhe disa numra të vlerave të funksionit që i dijmë përmendsh, pa përdor kalkulator, tabelë logaritmike ose ndonjë doracak tjetër. Për shembull mund të formojmë këtë tabelë:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
	zero			max			zero			min			zero

Pastaj, në sistemin kënddrejtë koordinativ i vendosim pikat $O(0,0)$, $M_1(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $M_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, etj. dhe i lidhim me vijë të hollë e cila përafërsisht e paraqet grafikun e funksionit $\sin x$ në intervalin $[0, 2\pi]$ (fig.1).

Nëse grafikun në intervalin $[0, 2\pi]$ e bartim majtas dhe djathtas në intervalin me gjatësi 2π , do ta fitojmë grafikun e funksionit $\sin x$ në tërë intervalin $(-\infty, +\infty)$ (fig.2).

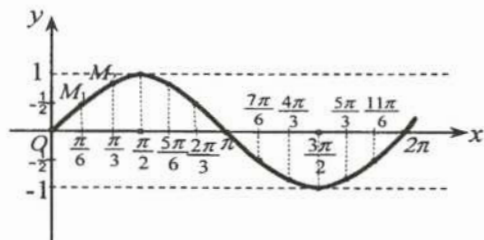


fig.1

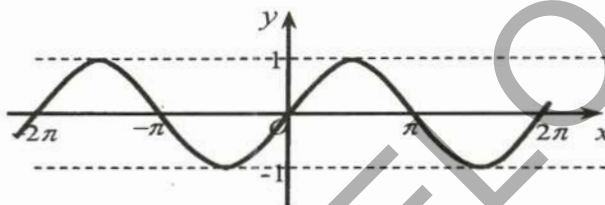


fig.2

Lakorja e cila e paraqet grafikun e funksionit $y = \sin x$ në intervalin $(-\infty, +\infty)$, e quajmë **sinusoidë** (sipas emrit të funksionit).

Mënyra II. E konstruktojmë grafikun e funksionit $y = \sin x$ në intervalin $[0, 2\pi]$, me çfarëdo saktësi, duke e zbatuar përkufizimin e tij në vijën rrethore trigonometrike.

Për atë qëllim, skicojmë vijë rrethore me rreze 1 (një) dhe qendër në boshtin x , kurse pastaj duke filluar prej pikës A e ndajmë vijën rrethore në çfarëdo numër të pjesëve të barabarta (në figuren 3 ai numër është 16) me pikat $A=0, 1, 2, 3, 4, \dots, 16 \equiv A$, me të cilat janë përcaktuar këndet $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \dots, 2\pi$. Pastaj në boshtin x , duke filluar prej fillimit të koordinatave O , bartim segment gjatësia e të cilit është e barabartë me gjatësinë e vijës rrethore, d.m.th. segment me gjatësi $P = 2\pi \approx 6,28$, dhe të njëjtën e ndajmë gjithashtu në 16 pjesë të barabarta (fig. 13). Më tutje, në pikat 0, 1, 2, 3, ..., 16 prej vijës rrethore tërheqim drejtëza paralele me boshtin x , kurse në pikat 0, 1, 2, 3, ..., 16 në boshtin x ngrejmë normale. Pikëprerjet e drejtëzave paralele dhe normale, janë pikat e grafikut të funksionit (pse?),

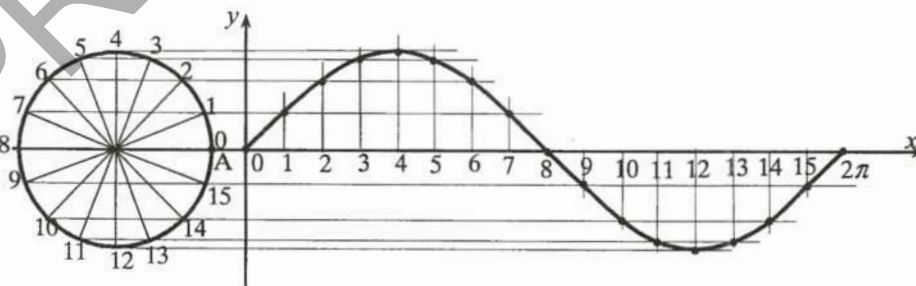


fig.5

të cilët i lidhim me vijë të hollë dhe kështu e fitojmë grafikun e funksionit $y = \sin x$, në intervalin $[0, 2\pi]$ (fig.3).

2. Vijimi dhe grafiku i funksionit $y = \cos x$. Grafikun e funksionit të kosinusit mund ta konstruktojmë (skicojmë) në mënyrë të ngjashme sikurse grafikun e funksionit të sinusit. Një mënyrë është formimi i tabelës:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$		$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	max			zero			min			zero			max

Nëse çiftet e pikave $(x, \cos x)$ i vendosim në sistemin kënddrejtë koordinativ dhe i lidhim me vijë të hollë, do ta fitojmë grafikun e funksionit $y = \cos x$ në intervalin $0 \leq x \leq 2\pi$, që paraqet „një valë” prej grafikut të $y = \cos x$. Nëse këtë valë e bartim njëzën pas tjetrës majtas dhe djathtas në intervale me gjatësi 2π , do ta fitojmë grafikun e funksionit $\cos x$ në tërë intervalin $(-\infty, +\infty)$ (fig.4). Grafikun e kosinusit e quajmë **kosinusoidë**.

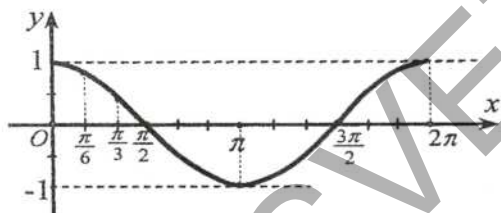


fig.6

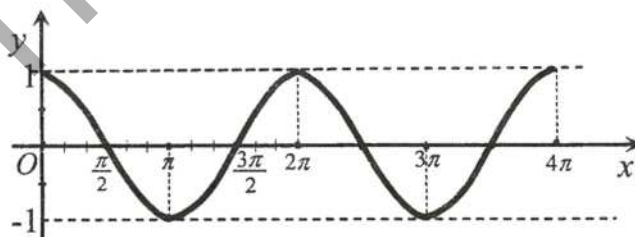


fig.7

T'i vendosim në tabelën e njëjtë pikat karakteristike të $y = \sin x$ dhe $y = \cos x$ në intervalin $x \in [0, \frac{5\pi}{2}]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1
	zero	max	zero	min	zero	max
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0
	max	zero	min	zero	max	zero

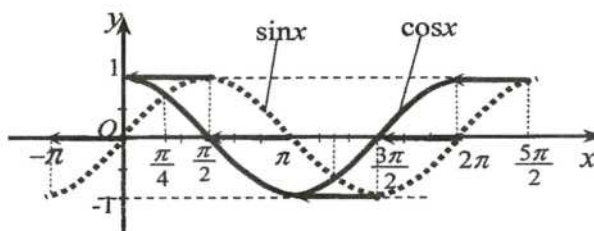


fig.9

Prej tabelës vërejmë se vlerat karakteristike të kosinusit (zerot dhe vlerat ekstreme) fitohen për vlerat e argumentit të cilët janë „zhvendosur” për $\frac{\pi}{2}$ njësi majtas në lidhje me vlerat e argumentit për të cilët fitohen vlerat karakteristike të sinusit, kurse e njëjta vlen edhe për të gjitha vlerat tjera të këtyre dy funksioneve. Kjo do të thotë se grafikun e $\cos x$ e fitojmë kur grafikun e $\sin x$ do ta zhvendosim për $\frac{\pi}{2}$ njësi majtas në drejtim të boshtit të x (fig.9). Deri te shqyrtimet e njëjta arrijmë edhe me ndihmën e formulës për sjelljen $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Prej grafikut të funksionit mund t'i shqyrtojmë vetitë e kosinusit të cilat tani më i kemi konstatuar:

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ ose $|\cos x| \leq 1$, d.m.th. funksioni është **i kufizuar**;
2. grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me boshtin y , d.m.th. $\cos x$ është **funksion çift**;
3. grafiku e prenë boshtin x në pikat $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$, d.m.th. në $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$), për të cilët $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$; vijon $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$) janë **zero të kosinusit**;
4. në intervalin themelor $[0, 2\pi]$, $\cos x$ **monotonisht zvogëlohet** prej 1 deri në -1 në intervalin $[0, \pi]$, kurse **monotonisht rritet** prej -1 deri në 1 në intervalin $[\pi, 2\pi]$. Ose në përgjithësi, në tërë fushën e përkufizimit $(-\infty, +\infty)$, $\cos x$ monotonisht rritet në intervalet $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, kurse monotonisht zvogëlohet në intervalet $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$;
5. $\cos x$ arrin **maksimum** $y=1$ për $x=2k\pi$, $k \in Z$ dhe **minimum** $y=-1$ për $x=(2k+1)\pi$, $k \in Z$, përkatësisht $\cos 2k\pi=1$, $\cos(2k+1)\pi=-1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$
6. $\cos x > 0$ për $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, përkatësisht për $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in Z$;
 $\cos x < 0$ për $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ përkatësisht për $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in Z$.

3. Vijimi dhe grafiku i funksionit $y = \tan x$.

- 1° **Fusha e përkufizimit** për tangensin janë intervalet $D_{\tan x} = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\}$;
- 2° **bashkësia e vlerave** është intervali $V_{\tan x} = (-\infty, +\infty)$;
- 3° funksioni është **periodik** me periodën themelore $T=\pi$;
- 4° për çdo $x=k\pi$ ($k \in Z$), $\tan k\pi=0$, dhe vijon, **zero të funksionit** janë numrat $x=k\pi$ ($k \in Z$);

5° kur x tenton kah $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$) atëherë $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, dhe vijon se drejtëzat $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) janë **asimptota vertikale** për tangensoidën. Për $k=0$ e fitojmë asimptotën $x = \frac{\pi}{2}$, kurse për $k=-1$ asimptotën $x = -\frac{\pi}{2}$;

6° $\operatorname{tg} x$ **monotonisht rritet** në çdonjërin prej intervaleve $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; për $k=0$ e fitojmë intervalin themelor $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

7° në çdo interval $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) grafiku është nën boshtin x , d.m.th. $\operatorname{tg} x < 0$, kurse në intervalet $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$), grafiku është mbi boshtin x d.m.th. $\operatorname{tg} x > 0$. Për $k=0$, i fitojmë intervalet $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ dhe $(0, \frac{\pi}{2})$ për të cilët $\operatorname{tg} x < 0$ respektivisht $\operatorname{tg} x > 0$, përkatëse.

8° Grafiku. Pasi perioda themelore për tangensin është $T=\pi$, mjafton ta konstruktojmë grafikun e tij për vlerat e x në intervalin me gjatësi π , për shembull në intervalin $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Grafikun e $y = \operatorname{tg} x$ njëjtë sikurse edhe grafikun e sinusit mund ta skicojmë me ndihmën e vijës rrethore trigonometrike dhe me ndihmën e tabelës prej vlerave karakteristike.

Për ta skicuar grafikun me ndihmën e vijës rrethore trigonometrike, e tërheqim boshtin e tangensit ndaj vijës rrethore në pikën A (fig.10). Pastaj gjyjmën e djathtë të vijës rrethore dhe intervalit përkatës $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ të boshtit x i ndajmë, në 12 pjesë të barabarta. Vijimi i mëtutjeshëm i mënyrës është i njëjtë

sikurse gjatë skicimit të grafikut të $\sin x$ dhe $\cos x$ dhe ai mund të vërehet sipas figurës 10.

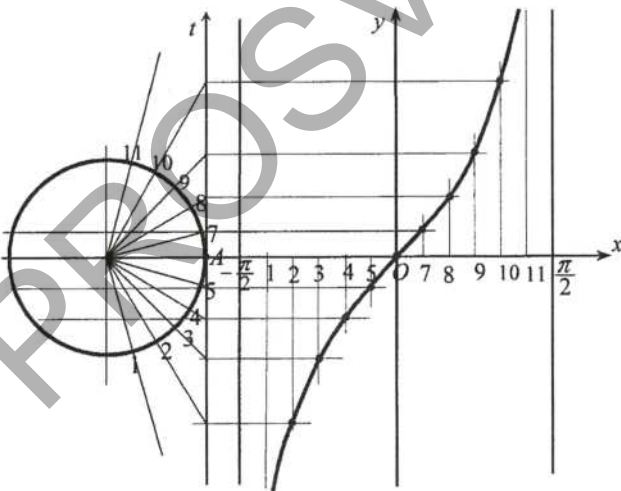


fig.10

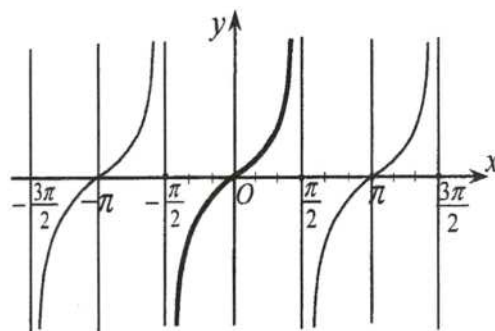


fig.11

Lakorja në fig.10 është vetëm një degë e grafikut të funksionit $y = \operatorname{tg} x$. Me translacionin e tij djathtas dhe majtas sipas gjatësisë së boshtit x për gjatësi $\pi, 2\pi, 3\pi$, etj., e fitojmë grafikun e funksionit $y = \operatorname{tg} x$ në tërë intervalet e përkufizimeve $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$ (fig.11).

Lakoren e cila e paraqet grafikun e $y = \operatorname{tg} x$ e quajmë **tangensoidë**.

4. Vijimi dhe grafiku i funksionit $y = \operatorname{ctg} x$. Grafikun e funksionit $y = \operatorname{ctg} x$ mund ta skicojmë me ndihmën e grafikut të funksionit $y = \operatorname{tg} x$ duke zbatuar formulat për reduktim

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) \quad (1)$$

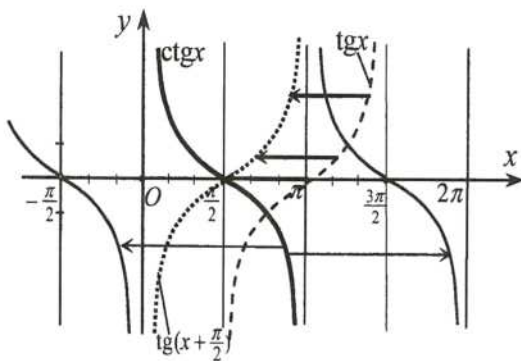


fig.12

Prej (1) vijon se grafiku i $\operatorname{ctg} x$ në intervalin themelor $x \in (0, \pi)$, e fitojmë kur grafikun e $\operatorname{tg} x$ në intervalin $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, me translacion do ta zhvendosim për $\frac{\pi}{2}$ njësi majtas në drejtim të boshtit x , dhe pastaj do ta pasqyrojmë me simetri boshtore në lidhje me boshtin x (fig.12).

Deri te i njëjti grafik do të arrijmë edhe nëse formojmë tabelë prej një numri të pikave prej grafikut të funksionit $y = \operatorname{ctg} x$ të intervalit themelor $(0, \pi)$, kurse pastaj i bartim në sistemin koordinativ dhe i lidhim me vijë të hollë. Preferojmë këtë nxënësi ta bën për ushtrim.

Lakoren e cila e paraqet grafikun e $y = \operatorname{ctg} x$ e quajmë **kotangensoidë**.

Prej grafikut i vërejmë këto veti për funksionin $y = \operatorname{ctg} x$:

- 1° bashkësia e përkufizimit për $\operatorname{ctg} x$ është $D_{\operatorname{ctg} x} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \mid k \in \mathbb{Z}$;
- 2° drejtëzat $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) janë **asimptota vertikale** për funksionin $\operatorname{ctg} x$;
- 3° bashkësia e vlerave është intervali $(-\infty, +\infty)$, d.m.th. $\operatorname{ctg} x$ është funksion i pakufizuar;
- 4° zerot për $\operatorname{ctg} x$ janë numrat $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), d.m.th. numrat $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$;
- 5° $\operatorname{ctg} x$ **monotonisht zvogëlohet** në çdo interval $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 6° në çdo interval $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ grafiku është mbi boshtin x , d.m.th. $\operatorname{ctg} x > 0$, kurse në çdo interval $(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi)$ grafiku është nën boshtin x , d.m.th. $\operatorname{ctg} x < 0$; për $k=0$ i fitojmë intervalet themelore $(0, \frac{\pi}{2})$ dhe $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, për të cilët $\operatorname{ctg} x > 0$ respektivisht $\operatorname{ctg} x < 0$, përkatëse.

1. Është dhënë funksioni $y = \sin x$. a) Plotësoje tabelën:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\sin x$				$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1

b) Duke e shfrytëzuar tabelën nën a) vizatoje grafikun e funksionit në intervalin $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c) Duke e shfrytëzuar formulën $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ vizato grafikun në intervalin $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

ç) Duke e shfrytëzuar formulën $\sin(\pi + x) = -\sin x$ vizatoje grafikun në intervalin $[\pi, 2\pi]$.

2. a) Për vlerat e argumentit $x = \{-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0\}$ formo tabelë për vlerat e $y = \cos x$.

b) Duke e shfrytëzuar tabelën e fituar nën a) skicoje grafikun e funksionit $y = \cos x$ në intervalin $[-\pi, 0]$.

c) Duke e shfrytëzuar vetinë $\cos(-x) = \cos x$ dhe grafikun e funksionit në intervalin $[-\pi, 0]$, skicoje grafikun e $y = \cos x$ të segmentit $[0, \pi]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					-1				$\sqrt{3}$		

3. Plotësoje tabelën dhe sipas asaj vizatoje grafikun e $y = \tan x$, në intervalin $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Skicoje grafikun e funksionit $y = \tan x$ në intervalin $[-\pi, \pi]$.

5. a) Plotësoje tabelën dhe sipas asaj skicoje grafikun e $y = \cot x$ në intervalin $(0, \frac{\pi}{2}]$.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cot x$				1		

b) Duke e zbatuar formulën $\cot(\pi - x) = -\cot x$ dhe grafikun nën

a) skicoje grafikun e $\cot x$ në intervalin $[0, \pi]$.

6. Skico grafikun e funksionit $y = \cot x$ në intervalin $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

2.2.2. VIJIMI DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT $y = a \sin(bx + c) + d$.

Për ta fituar grafikun e funksionit $y = a \sin(bx + c) + d$, paraprakisht do t'i shqyrtojmë dhe skicojmë grafikët e funksioneve:

$$y = a \sin x, \quad y = \sin(x + c) \quad \text{dhe} \quad y = \sin bx.$$

1. Grafiku i funksionit $y = a \sin x$, ($a \neq 0$). Vlera e funksionit $y = a \sin x$ për vlerën e argumentit x fitohet kur vlerën e funksionit $y = \sin x$ do ta shumëzojmë me konstanten a . Prej kësaj vijon se grafikun e $y = a \sin x$ mund ta fitojmë me ndihmën e grafikut të $y = \sin x$ ashtu që çdo ordinatë të tij do ta shumëzojmë me a . Kjo do të thotë **vlerat karakteristike** (zerot dhe ekstremet) për $y = a \sin x$ janë në të njëjtat vlera të x sikurse edhe për $y = \sin x$.

Në këtë mënyrë, varësisht prej asaj se vallë $|a| > 1$ ose $|a| < 1$, grafikun e $y = a \sin x$ e fitojmë, përkatësisht, vetëm „me zgjatje” ose „me ngjeshje” të grafikut të $y = \sin x$ për $|a|$ herë në drejtim të boshtit y .

Prej $-1 \leq \sin x \leq 1$ vijon $-|a| \leq a \sin x \leq |a|$, d.m.th.

$$\max(a \sin x) = |a|, \quad \min(a \sin x) = -|a|.$$

Numri $|a|$ quhet **amplitudë** për funksionin $y = a \sin x$, dhe e jep largësinë e pikave ekstreme prej grafikut deri te boshti i abshisës.

► **Shembulli 1.** T'i skicojmë grafikët e funksioneve $y = \sin x$, $y_1 = 2 \sin x$ dhe $y_2 = \frac{1}{2} \sin x$, në të njëjtin sistem koordinativ.

Zgjidhje. Së pari e skicojmë grafikun e $y = \sin x$; pastaj grafikun y_1 e fitojmë duke e zgjatur sinusoidën për 2 njësi në drejtim të boshtit y , kurse grafikun e y_2 duke e ngjeshur për $\frac{1}{2}$ njësi në drejtim të boshtit y (fig.1) ■

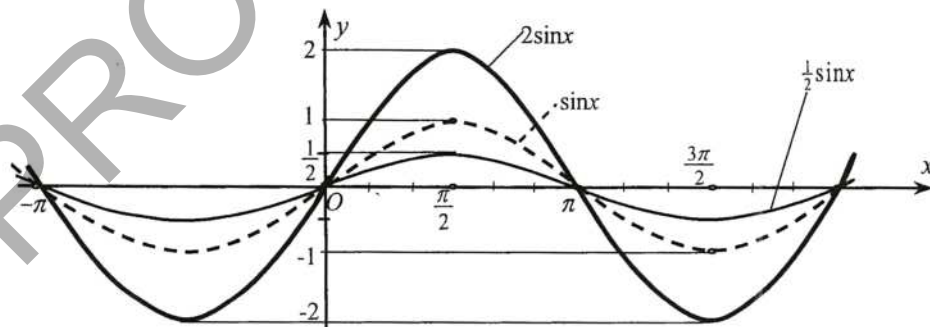


fig.1

➤ **Shembulli 2.** T'i skicojmë grafikët e funksioneve a) $y = -\sin x$ b) $y_1 = -3\sin x$
c) $y_2 = -\frac{1}{3}\sin x$.

Zgjidhje. a) Këtu $a = -1$. Kjo do të thotë se çdo ordinatë e $y = \sin x$ duhet ta shumëzojmë me -1 . Pasi pikat (x, y) dhe $(x, -y)$ janë simetrike në lidhje me boshtin x , grafikun e $y = -\sin x$ e fitojmë kur grafikun e $y = \sin x$ do ta pasqyrojmë simetrikisht në lidhje me boshtin x (fig.2)

b) Pasi $a = -3 < 0$, grafikun e $y_1 = -3\sin x$ e fitojmë me ndihmën e grafikut të $y = -\sin x$, me ngjeshjen e saj për 3 njësi sipas gjatësisë së boshtit y (fig.2).

Në të njëjtën mënyrë e skicojmë grafikun nën c) (përpiku ta vizatosh vet duke përcjellë të njëjtën mënyrë sikurse nën b) (fig. 2).

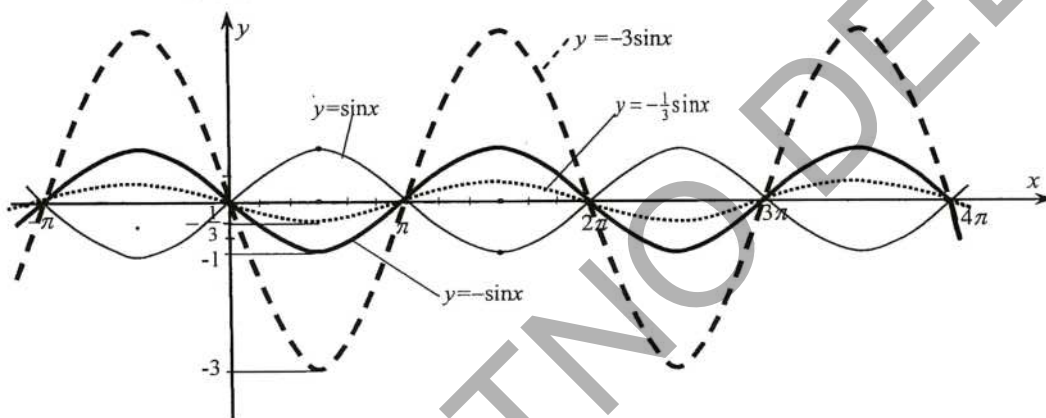


fig.2

2. Grafiku i $y = \sin(x + c)$. Për çfarëdo vlerë $x_0 \in \mathbb{R}$, vlen:

$$\sin x_0 = \sin((x_0 + c) - c),$$

prej ku vijon se pikat prej grafikut të $y = \sin(x + c)$ mund t'i fitojmë me translacionin e pikave të sinusoidës $y = \sin x$ për c njësi në drejtim të boshtit x .

Kjo do të thotë, intervali themelor (perioda) dhe pikat karakteristike prej grafikut të $y = \sin(x + c)$ (zerot dhe ekstremët) janë zhvendosur për c njësi në lidhje me pikat përkatëse prej grafikut të $y = \sin x$, dhe atë për c njësi majtas prej $c > 0$ (translacioni majtas), ose për $|c|$ njësi djathtas nëse $c < 0$ (translacioni djathtas). Vijon:

- intervali themelor për $y = \sin(x + c)$ është intervali $[-c, 2\pi - c]$;
- $y = 0$ d.m.th. $\sin(x + c) = 0$ për $x + c = k\pi$, d.m.th. $x = k\pi - c$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $y_{\max} = 1$ d.m.th. $\sin(x + c) = 1$ për $x + c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, d.m.th. $x = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - c$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $y_{\min} = -1$ d.m.th. $\sin(x + c) = -1$ për $x + c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, d.m.th. $x = (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) - c$, $k \in \mathbb{Z}$;
- grafiku i $y = \sin(x + c)$ është „zhvendosur” sinusoida.

► **Shembulli 3.** Duke e përdor grafikun e funksionit $\sin x$, t'i skicojmë grafikët e funksioneve:

a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ b) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

Zgjidhje. a) Këtu $c = -\frac{\pi}{4} < 0$, prandaj grafikun e $\sin x$ do ta zhvendosim nëpër gjatësinë e boshtit x për $\frac{\pi}{4}$ njësi djathtas. Vijon se, vala themelore është në intervalin $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ (fig.3).

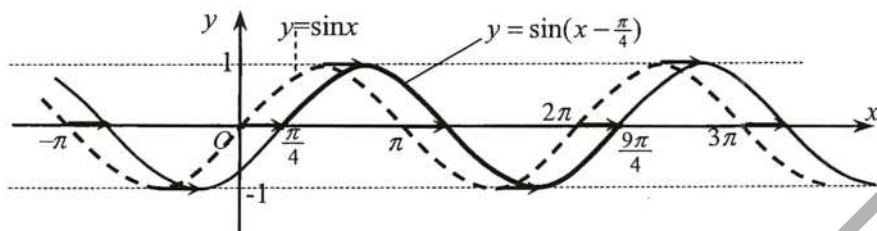


fig.3

b) Këtu $c = \frac{\pi}{3} > 0$, pra grafikun e $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ e fitojmë me translacionin e grafikut të $\sin x$ për $\frac{\pi}{3}$ njësi majtas. Atë më thjeshtë e bëjmë ashtu që i zhvendosim pikat karakteristike, zerot dhe ekstremet për $\frac{\pi}{3}$ njësi majtas dhe i lidhim me lakore identike me sinusoidën themelore (fig. 4). Intervali themelor, te i cili e skicojmë valën themelore të funksionit është $[-\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}]$. Për shkak të qartësisë, pikat

karakteristike prej grafikut në intervalin themelor i vendosim në tabelë.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$	$2\pi - \frac{\pi}{3}$
$\sin(x + \frac{\pi}{3})$	0	1	0	-1	0
	zero	max	zero	min	zero

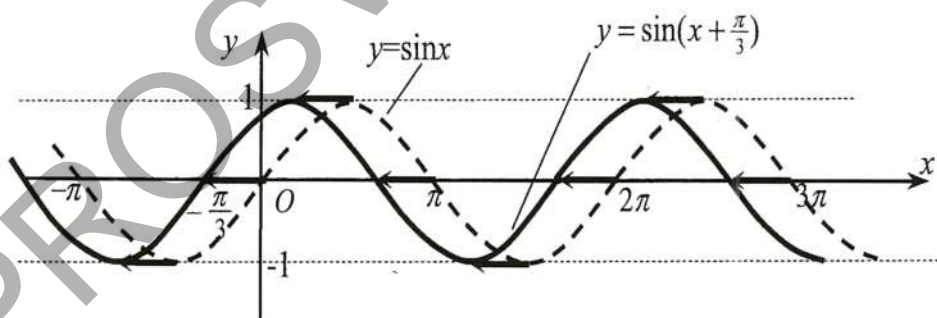


fig.4

3. Grafiku i funksionit $y = \sin bx$. Vërejtëm se perioda themelore e funksionit $y = \sin x$ është

$T = 2\pi$. Do të tregojmë se edhe $y = \sin bx$ është funksion periodik me periodën themelore $T = \frac{2\pi}{|b|}$. Me të

vërtetë, për $b > 0$ kemi:

$$\sin bx = \sin(bx + 2\pi) = \sin\left(bx + b \cdot \frac{2\pi}{b}\right) = \sin b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right).$$

Për shembull, perioda themelore e funksionit $y = \sin 2x$ është $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, kurse perioda për $y = \sin \frac{x}{2}$ është $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Vërejmë se për $b = 2 > 1$, funksioni $y = \sin 2x$ ka periodë themelore e cila

është dy herë më e vogël në lidhje me periodën e funksionit $y = \sin x$, kurse për $b = \frac{1}{2} < 1$ perioda e funksionit $y = \sin \frac{x}{2}$ është dy herë më e madhe në lidhje me periodën e $y = \sin x$.

Kjo vlen në rastin e përgjithshëm. Nëse $|b| > 1$, $\frac{2\pi}{|b|} < 2\pi$, atëherë perioda themelore e funksionit $y = \sin bx$ është më e vogël se perioda themelore e $\sin x$. Nëse $|b| < 1$ atëherë $\frac{2\pi}{|b|} > 2\pi$, pra vijon, perioda themelore e $y = \sin bx$ të jetë më e madhe se perioda themelore e $\sin x$.

Ta dijmë vijimin dhe ta vizatojmë grafikun e funksionit $y = \sin bx$ mjafton ta skicojmë grafikun e tij në *intervalin themelor* $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ dhe ajo është **vala themelore** për $y = \sin bx$.

Numri $|b|$ tregon sa herë intervali themelor përmbahet te intervali themelor për funksionin $y = \sin x$, përkatësisht në segmentin me gjatësi 2π dhe e quajmë **frekuenca rrethore** për funksionin $y = \sin bx$.

Numri $T = \frac{2\pi}{|b|}$ (perioda e funksionit), e jep gjatësinë e intervalit themelor të funksionit $y = \sin bx$ quhet edhe **gjatësia valore** për funksionin.

Prej tërë asaj që u theksua më lartë vijon se grafikun e funksionit $y = \sin bx$ e fitojmë prej grafikut të $y = \sin x$ me „*zgjatje*” për $|b|$ -herë nëse $|b| < 1$, ose me „*ngjeshje*” për $|b|$ herë nëse $|b| > 1$, në drejtim të boshtit x . Kjo tani do të thotë se vlerat karakteristike (zerot dhe ekstremet) funksioni $y = \sin bx$ i fiton në abshisa të cilat janë $|b|$ -herë më të mëdha ose më të vogla prej abshisave të të cilat funksioni $y = \sin x$ i fiton vlerat përkatëse karakteristike, varësisht prej asaj vallë $|b| < 1$ ose $|b| > 1$. Kështu kemi:

- $y = 0$, d.m.th. $\sin bx = 0$ për $bx = k\pi$, $x = k \cdot \frac{\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$, kurse zerot në intervalin themelor $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ i fitojmë për $k = 0, 1, 2$;
- $y_{\max} = 1$, d.m.th. $\sin bx = 1$ për $bx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$; maksimumin në

intervalin themelor $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ e fitojmë për $k = 0$.

- $y_{\min} = -1$, d.m.th. $\sin bx = -1$ për $bx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$; minimumin në intervalin themelor $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ e fitojmë për $k = 0$.

➤ **Shembulli 4.** T'i vizatojmë në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve

a) $y = \sin 2x$ b) $y = \sin \frac{x}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
	zero	max	zero	min	zero

Zgjidhje. a) Perioda themelore për $y = \sin 2x$ sikurse vërejtëm më lartë është $T = \pi$, pra intervali themelor në të cilin do ta vizatojmë valën themelore është intervali $[0, \pi]$. Pikat karakteristike për funksionin i vendosim në tabelën majtas, kurse grafiku është treguar në fig. 5.

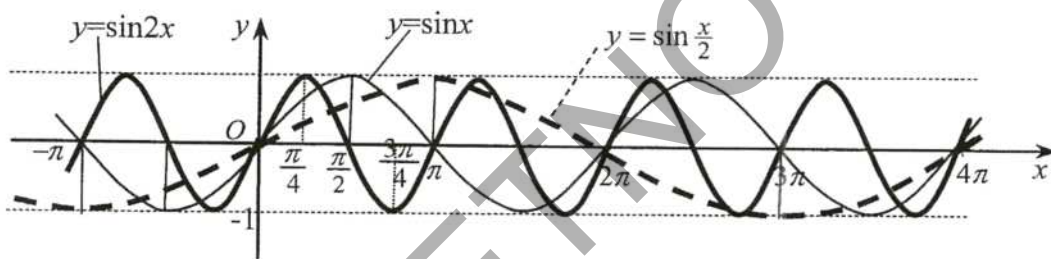


fig.5

x	0	π	2π	3π	4π
$\sin \frac{x}{2}$	0	1	0	-1	0
	zero	max	zero	min	zero

b) Perioda themelore për $y = \sin \frac{x}{2}$ është $T = 4\pi$, kurse intervali themelor është $[0, 4\pi]$ (fig.5). Vlerat karakteristike të funksionit janë vendosur në tabelën majtas.

➤ **Shembulli 5.** Ta caktojmë amplitudën, periodën dhe barazimin e lakores të paraqitur në fig. 6.

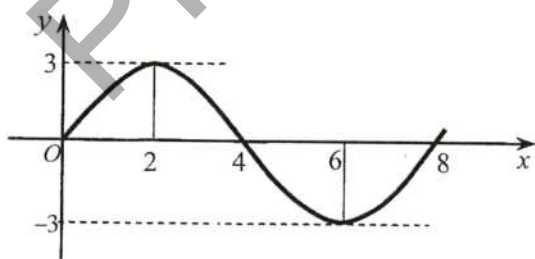


fig.6

Zgjidhje. Lakorja është sinusoida $y = a \sin bx$, me amplitudë $a = 3$ dhe periodë $T = 8$. Prej barasisë

$$T = \frac{2\pi}{b} \text{ kemi } 8 = \frac{2\pi}{b}, \text{ prej ku e gjejmë}$$

$$b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}. \text{ Prandaj barazimi i lakores}$$

$$\text{është } y = 3 \sin \frac{\pi}{4} x.$$

4. Grafiku i funksionit $y = a \sin(bx + c)$. Funksioni

$$y = a \sin(bx + c) \quad (a \neq 0, b > 0) \quad (1)$$

është funksion periodik me periodën themelore $\frac{2\pi}{b}$. Me të vërtetë,

$$a \sin(b(x + \frac{2\pi}{b}) + c) = a \sin(bx + b \cdot \frac{2\pi}{b} + c) = a \sin((bx + c) + 2\pi) = a \sin(bx + c).$$

Numri $|a|$ paraqet amplitudë për funksionin $y = a \sin(bx + c)$. Për shkak të

$$a \sin bx = a \sin b(x + \frac{c}{b} - \frac{c}{b}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

grafiku i funksionit (1) fitohet me translacionin e grafikut të funksionit $y = a \sin bx$ në drejtim të boshtit x për $\frac{c}{b}$ njësi majtas nëse është $\frac{c}{b} > 0$, ose për $|\frac{c}{b}|$ djathtas nëse është $\frac{c}{b} < 0$.

Në bazë të asaj që u përmend më lartë vijon se grafikon e funksionit (1) mund ta fitojmë me transformimin e grafikut të $y = \sin x$, ashtu që njërin pas tjetrit i skicojmë grafikët e: $y = \sin x$, $y = \sin bx$, $y = \sin b(x + \frac{c}{b})$ dhe përfundimisht $y = a \sin b(x + \frac{c}{b})$, të cilët tani më dijmë t'i vizatojmë.

➤ **Shembulli 6.** Ta vizatojmë grafikon e funksionit $y = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$ me ndihmën e grafikut $y = \sin x$.

Zgjidhje. E transformojmë barazimin $y = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$ në formën $y = \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{1}{2})$.

Perioda themelore është $T = \frac{2\pi}{2} = \pi < 2\pi$, që do të thotë se kemi „ngjeshje” të valës themelore të sinusoidës $y = \sin x$ për dy herë. Pasi $\frac{c}{b} = \frac{1}{2}$, kemi translacion të sinusoidës për $\frac{1}{2}$ njësi majtas, përkatësisht intervali themelor është $[-\frac{1}{2}, \pi - \frac{1}{2}]$. Amplituda është $a = \frac{1}{2} < 1$, që do të thotë se amplitudën e $y = \sin x$ duhet ta zvogëlojmë për dy herë. Domethënë, i vizatojmë me radhë grafikët e 1° $y = \sin x$; 2° $y = \sin 2x$ (fig.7a); 3° $y = \sin 2(x + \frac{1}{2})$ (fig.7b); 4° $y = \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{1}{2})$ (fig.7c).

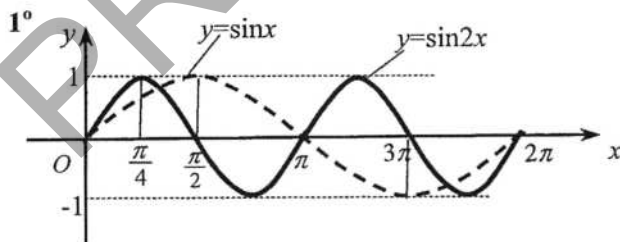


fig.7a

ngjeshja në drejtim të boshtit x

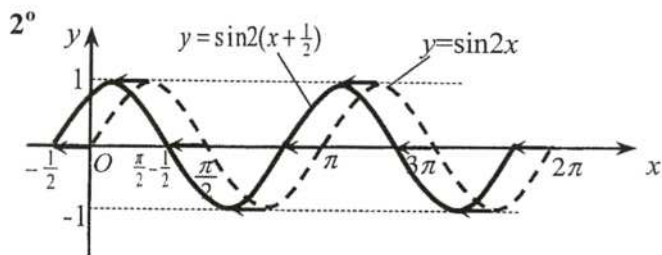


fig.7b

translacioni për $\frac{1}{2}$ majtas

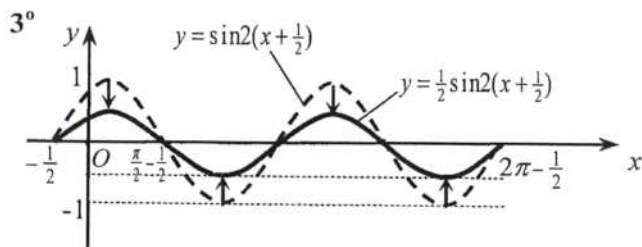


fig.7c

zvogëlimi i amplitudës d.m.th. ngjeshja në drejtim të boshtit y

➤ **Shembulli 7.** Ta shqyrtojmë vijimin dhe ta vizatojmë grafikun e funksionit $y = -3 \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8})$.

Zgjidhje. Mund ta skicojmë grafikun e funksionit duke e vijuar të njëjtën mënyrë sikurse te shembulli 1. Perioda themelore është $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; $\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4} < 0$ që do të thotë transalcioni i sinusoidës për

$\frac{\pi}{4}$ njësi djathtas nëpër gjatësi të boshtit x; $a = -3 < 0$ d.m.th. amplituda është $|a| = |-3| = 3 > 1$ që do të thotë se amplituda e $y = \sin x$ duhet të zmadhohet për tri herë. Vijon, t'i vizatojmë me radhë grafikët e: $y = \sin x$; $y = \sin \frac{1}{2}x$; $y = \sin \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$ dhe në fund $y = -3 \sin \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$ (fig.8) ■

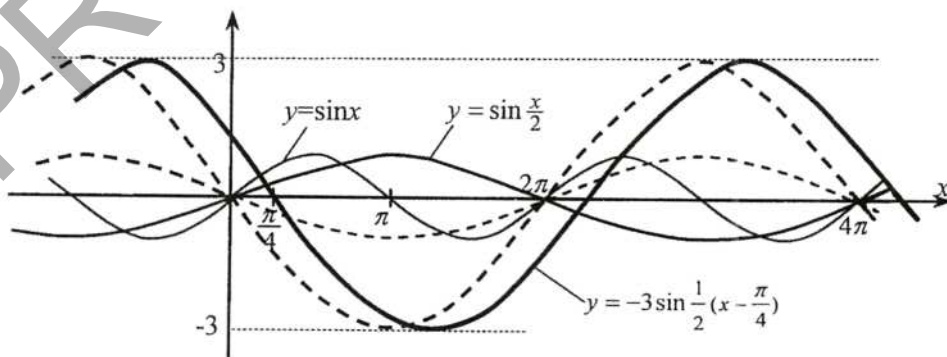


fig.8

Grafikun e funksionit mund ta fitojmë edhe drejtpërdrejt, duke i përcaktuar vlerat (zerot dhe ekstremet) për funksionin e intervalit themelor $[\frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}]$ d.m.th. $[\frac{\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}]$. Për funksionin e dhënë ato janë:

1. zerot: i caktojmë prej kushtit $-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$, përkatësisht $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = 0$ ose $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi$ ose $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = 2\pi$, prej ku: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = 2(\pi + \frac{\pi}{8}) = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$, $x = 2(2\pi + \frac{\pi}{8}) = 4\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$;

2. vlerat ekstreme: $y_{\max} = 3$ nëse $-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 3$ d.m.th. $\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = -1$, prej ku caktojmë: $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$ përkatësisht $x = 2(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$;

$y_{\min} = -3$ nëse $-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = -3$ d.m.th. $\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 1$, prej ku $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, përkatësisht $x = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Për shkak të qartësisë vlerat e fituara i vendosim në tabelë me ndihmën e së cilës e vizatojmë grafikun e funksionit (fig. 9).

x	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	$2\pi + \frac{\pi}{4}$	$3\pi + \frac{\pi}{4}$	$4\pi + \frac{\pi}{4}$
$-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8})$	0	-3	0	3	0
	zero	min	zero	max	zero

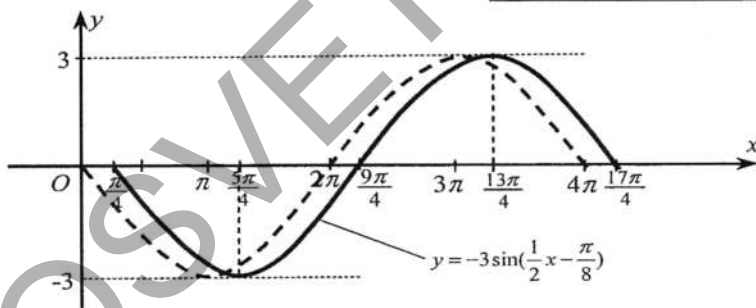


fig.9

5. Grafiku i funksionit $y = a\sin(bx+c)+d$. Për çfarëdo vlerë të argumentit x vlerën e funksionit

$$y = a\sin(bx+c)+d \quad (3)$$

e fitojmë kur funksionit $y = a\sin(bx+c)$ do ta zmadhojmë për d . Prej këtu vijon se grafikun e funksionit $y = a\sin(bx+c)+d$ e fitojmë me translacionin e grafikut të funksionit $y = a\sin(bx+c)$ për d njësi në drejtim të boshtit y dhe atë: nëse $d > 0$ me translacionin në kahen pozitive (lartë), por nëse $d < 0$ – me translacionin në kahen negative (poshtë).

➤ **Shembulli 8.** Ta skicojmë grafikun e funksionit $y = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 2$.

Zgjidhje. Së pari e skicojmë grafikun e $y = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2})$, për të cilin tani më vërejtëm se si fitohet,

kurse pastaj me translacion për 2 njësi në kahen pozitive të boshtit y e vizatojmë grafikun e

$$y = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 2$$

Formoje tabelën e vlerave karakteristike për funksionin në intervalin themelor, dhe sipas asaj vizatoje grafikun e funksionit, kurse pastaj krahasoje me vizatimin e fituar me fig. 10.

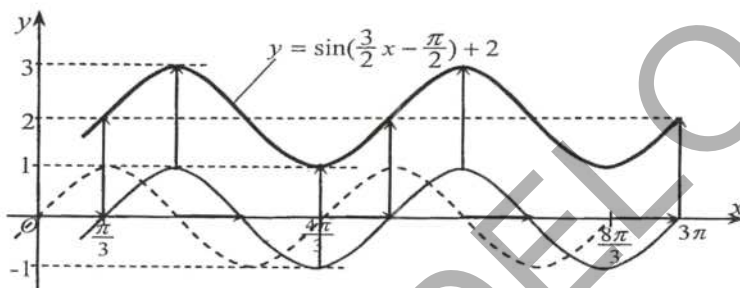


fig.10

DETYRA

Caktoje amplitudën dhe skicoje grafikun e funksioneve në intervalin $[-2\pi, 2\pi]$:

1. a) $y = \sin x$; b) $y = \frac{3}{2} \sin x$; c) $y = \frac{1}{3} \sin x$; 2. a) $y = -\sin x$; b) $y = -3 \sin x$; c) $y = -\frac{2}{3} \sin x$

3. Me ndihmën e grafikut të $\sin x$ skicoje grafikun e funksioneve:

a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$; b) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$; c) $y = -\sin(x - \frac{\pi}{6})$; d) $y = 2 \sin(x - 2)$

4. Caktoje periodën kurse pastaj skicoje grafikun e funksioneve:

a) $y = \frac{2}{3} \sin 3x$; b) $y = -2 \sin(-\frac{1}{4}x)$; c) $y = \sin \frac{3x}{2}$

5. Shqyrtoje vijimin dhe skicoje grafikun e funksioneve:

a) $y = \sin 3(x - \frac{\pi}{6})$ b) $y = \frac{3}{2} \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ c) $y = -2 \sin(2x - 1)$

6. Me ndihmën e grafikut të $\sin x$ vizatoji grafikët e funksioneve (7-9) në intervalet themelore:

a). $y = -\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ b). $y = 2 \sin(2 - x) - 2$ c). $y = \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3}x + 3$

2. 2. 3. VIJIMI DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT $y = a \cos(bx + c) + d$.

Grafikun e funksionit

$$y = a \cos(bx + c) + d \quad (1)$$

mund ta fitojmë me ndihmën e grafikut të funksionit $y = \cos x$ me mënyrën analoge të asaj me të cilën e fitojmë grafikun e funksionit $y = a \sin(bx + c) + d$ prej grafikut të $y = \sin x$, d.m.th. duke i krye me radhë transformimet: „ngjeshja” (nëse $b > 1$) ose „zgjatja” (nëse $b < 1$) të valës themelore $\cos x$ për $|b|$ herë në drejtim të boshtit x ; translacioni sipas gjatësisë së boshtit x për $-\frac{c}{b}$ njësi; „zgjatje” ($a > 1$) ose „ngjeshje” ($a < 1$) të amplitudës për $|a|$ herë sipas gjatësisë së boshtit y dhe në fund translacionin për d njësi sipas gjatësisë së boshtit y .

Domethënë, njërën pas tjetrit i vizatojmë grafikët e funksioneve:

$$y = \cos x, y = \cos bx, y = \cos b\left(x + \frac{c}{b}\right), y = a \cos b\left(x + \frac{c}{b}\right) \text{ dhe përfundimisht}$$

$$y = a \cos(bx + c) + d.$$

➤ **Shembulli 1.** Ta vizatojmë grafikun e funksionit $y = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ me ndihmën e grafikut të $y = \cos x$.

Zgjidhje. E shkruajmë funksionin në formën $y = 2 \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$, kurse pastaj i skicojmë njërinn pas tjetrit grafikët e funksioneve: $y = \cos\frac{1}{2}x$, $y = \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $y = 2 \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ dhe $y = 2 \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ (fig.1).

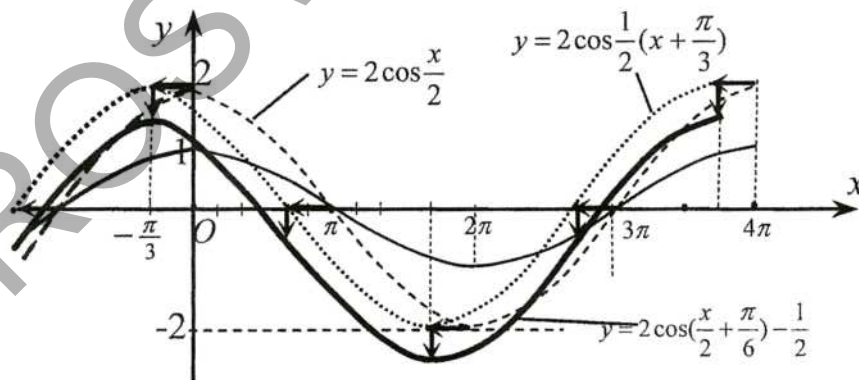


fig.1

➤ **Shembulli 2.** Ta shqyrtojmë vijimin dhe ta skicojmë grafikun e funksionit: $y = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Zgjidhje. Perioda themelore e funksionit është $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, kurse intervali themelor në të cilin e shqyrtojmë funksionin është intervali $[\frac{\pi}{8}, \pi + \frac{\pi}{8}]$, d.m.th $[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}]$. Vlerat karakterisrike për funksionin (zerot dhe ekstremet) në intervalin themelor janë:

1. **zerot:** i gjejmë prej kushtit $-\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ dhe $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, përkatësisht $x = \frac{3\pi}{8}$ dhe $x = \frac{7\pi}{8}$;

2. **ekstremet:** $y_{\max} = 1 \Leftrightarrow -\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8}$;
 $y_{\min} = -1 \Leftrightarrow -\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 0$ ose $2x - \frac{\pi}{4} = 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}$ dhe $x = \frac{9\pi}{8}$. Për qartësi më të madhe vlerat e gjetura i vendosim në tabelë sipas së cilës e vizatojmë grafikun (fig. 2).

x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$-\cos(2x - \frac{\pi}{4})$	-1	0	1	0	-1
	min	zero	max	zero	min

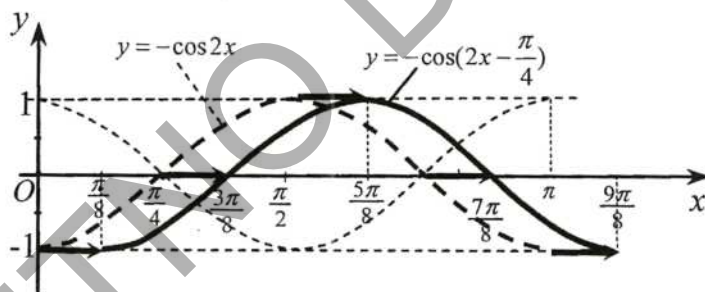


fig.2

DETYRA

1. Caktoje amplitudën dhe skicoje grafikun në intervalin $[-2\pi, 2\pi]$

a) $y = \frac{3}{4} \cos x$; b) $y = \frac{1}{3} \cos x$; c) $y = -\cos x$; ç) $y = -2 \cos x$; d) $y = -\frac{3}{2} \cos x$

2. Me ndihmën e grafikut të $\cos x$ skicoji grafikët e funksioneve (6-9):

a) $y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{12})$; b) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$; c) $y = -\cos(\frac{\pi}{6} - x)$; ç) $y = \cos(x - 1)$

3. Caktoje periodën kurse pastaj skicoje grafikun e funksioneve

a) $y = \cos(-2x)$; b) $y = \frac{2}{3} \cos \frac{x}{3}$; c) $y = -2 \cos(-\frac{1}{4}x)$; ç) $y = \cos \frac{3x}{2}$

4. Me transformime përkatëse të $\cos x$ skicoji grafikët e funksioneve në intervalin themelor:

a) $y = \cos 3(x - \frac{\pi}{6})$; b) $y = \frac{3}{2} \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$; c) $y = 2 \cos(1 - 2x)$

5. Shqyrtoje vijimin dhe vizatoje grafikun e funksioneve:

a) $y = -\cos 2(x - \frac{\pi}{2}) + 1$; b) $y = 3 \cos(3x - \pi) - 2$; c) $y = \frac{2}{3} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + \frac{1}{2}$ ç) $y = 3 \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

2.3. TRANSFORMIMI I SHPREHJEVE TRIGONOMETRIKE

2.3.1. TEOREMAT ADICIONALE PËR FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE

Teorema 1. Për çfarëdo vlera α dhe β vlejnjë formulat adicione:

$$(C_{\alpha+\beta}) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$(C_{\alpha-\beta}) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Vërtetim. Së pari do ta vërtetojmë formulën $(C_{\alpha-\beta})$. Le të jenë α dhe β çfarëdo kënde të zgjedhur

(fig. 1). Koordinatat e pikave M dhe N janë:

$$x_M = \cos \alpha, \quad y_M = \sin \alpha$$

$$x_N = \cos \beta, \quad y_N = \sin \beta$$

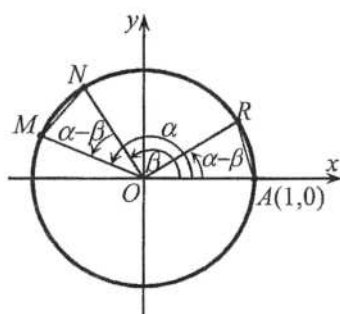


fig.1

Largësia d ndërmjet dy pikave $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$

njehsohet me formulën

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

sipas së cilës për katrorin e gjatësisë $\overline{MN}$ kemi:

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

Nëse këndin $\alpha - \beta = \angle NOM$ e rrotullojmë dhe e sjellim në pozitën standarde ashtu që $\alpha - \beta = \angle AOR$, atëherë koordinatat e pikës R janë: $x_R = \cos(\alpha - \beta)$, $y_R = \sin(\alpha - \beta)$, pra për katrorin e largësisë $\overline{AR}$ kemi:

$$\begin{aligned} \overline{AR}^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 = \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Prej $\overline{AR} = \overline{MN}$ (pse?), përkatësisht $\overline{AR}^2 = \overline{MN}^2$, vijon:

$$2 - 2(\cos(\alpha - \beta)) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

prej ku e fitojmë formulën $(C_{\alpha-\beta})$.

Nëse në $(C_{\alpha-\beta})$ e zëvendësojmë β me $-\beta$, dhe poashtu marrim parasysh se $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, e fitojmë formulën $(C_{\alpha+\beta})$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad \blacklozenge$$

Vërejtje. Në vërtetimin e teoremës nuk kishim kurrfarë kufizime për argumentët α dhe β ato janë me çfarëdo madhësie. Formula për largësinë është gjithashtu e saktë për çfarëdo pozite të pikave, prandaj vërtetimi ka karakter të përgjithshëm, d.m.th. vlen për çfarëdo vlera α dhe β .

Pasoja 1. Nëse $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ atëherë $\cos \alpha = \sin \beta$, $\cos \beta = \sin \alpha$.

Vërtetim. Prej $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ përkatësisht $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, sipas formulës ($C_{\alpha-\beta}$), kemi:

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \beta = 0 \cdot \cos \beta + 1 \cdot \sin \beta = \sin \beta \quad \blacklozenge$$

Pasoja 2. Nëse $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ atëherë $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$.

Vërtetim. Sipas pasojës 1: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta \quad \blacklozenge$

Teorema 2. Për çfarëdo vlera të α dhe β vlejné formulat:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (S_{\alpha+\beta}) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (S_{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

Vërtetim. Prej pasojës 1 kemi:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Nëse në $(S_{\alpha+\beta})$ e zëvendësojmë β me $-\beta$ fitojmë:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \blacklozenge$$

Me ndihmën e formulave adicione mund t'i gjejmë vlerat e sakta të funksioneve trigonometrike për disa vlera të këndit (pa tabelë dhe kalkulator), si edhe të thjeshtojmë disa shprehje trigonometrike. Këtë do ta ilustrojmë me disa shembuj.

➤ **Shembulli 1.** Ta caktojmë vlerën e: a) $\cos 75^\circ$; b) $\sin 15^\circ$.

Zgjidhje. a) Vërejmë se $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$. Atëherë sipas formulës ($C_{\alpha+\beta}$):

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

b) Pasi $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, prej $(S_{\alpha-\beta})$ kemi:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojmë vlerën $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Zgjidhje. Pasi $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, prej formulës ($S_{\alpha+\beta}$) kemi:

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \quad \blacksquare$$

➤ **Shembull 3.** Nëse $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) dhe $\sin \beta = \frac{5}{13}$ ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$), ta caktojmë vlerën

e $\cos(\alpha + \beta)$.

Zgjidhje. Për ta caktuar vlerën e $\cos(\alpha + \beta)$, duhet t'i gjejmë $\cos \alpha$ dhe $\cos \beta$. Pasi

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ vijon $\cos \alpha > 0$, pra $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Ngjashëm, për

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\cos \beta < 0$, pra $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$. Tani kemi:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{56}{65} \blacksquare$$

Teorema 3. Për çfarëdo kënde α dhe β për të cilët janë caktuar $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, d.m.th. $\alpha, \beta \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, vlejné formulat adicionele për tangensin

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (T_{\alpha \pm \beta})$$

Vërtetim: Duke marrë parasysh supozimin (1), kemi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \pm \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \mp \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4. Për çfarëdo kënde α dhe β për të cilët janë caktuar $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$, d.m.th. $\alpha, \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ vlejné formulat adicionele për kotangensin

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta} \quad (CT_{\alpha \pm \beta})$$

Vërtetimi i kësaj teoreme nxirret në mënyrë analoge sikurse ajo për $(T_{\alpha \pm \beta})$ dhe e lëmë për ushtrime.

➤ **Shembulli 4.** Ta thjeshtojmë, kurse pastaj ta caktojmë vlerën e shprehjes:

$$\frac{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 170^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}.$$

Zgjidhje. Kemi:

$$\frac{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 170^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg}(180^\circ - 10^\circ)}{1 + \operatorname{ctg}(90^\circ - 70^\circ) \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \operatorname{tg}(70^\circ - 10^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \blacksquare$$

DETYRA

1. Nëse $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, duke i zbatuar teoremat adicione vërteto:

a) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$; b) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$; c) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$;

Thjeshtoji shprehjet:

2. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$

3. $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$

4. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta}$

Njehso:

5. $\operatorname{ctg}(30^\circ + \alpha)$, nëse $\operatorname{ctg} \alpha = 2$

6. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + \alpha)$, nëse $\operatorname{ctg} \alpha = 1,5$

7. $\cos(60^\circ - \alpha)$, nëse $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

8. $\sin(45^\circ + \alpha)$, nëse $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

Vërtetoji identitetet:

9. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

10. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

11. $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

2.3.2. FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË DYFISHTË DHE GJYSMËKËNDIT

Nëse te formulat adicione ($S_{\alpha+\beta}$), ($C_{\alpha+\beta}$), ($T_{\alpha+\beta}$) dhe ($CT_{\alpha+\beta}$) vendojmë $\alpha = \beta$, i fitojmë formulat:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$(S_{2\alpha})$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$(C_{2\alpha})$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$(T_{2\alpha})$
$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$(CT_{2\alpha})$

të njohura si formula për funksionet trigonometrike prej këndit të dyfishtë.

► **Shembulli 1.** Ta provojmë formulën ($S_{2\alpha}$) për $\alpha = 30^\circ$.

Zgjidhje. E dijmë se $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nëse në formulën ($S_{2\alpha}$) zëvendësojmë $\alpha = 30^\circ$, fitojmë

$$\sin 60^\circ = \sin 2 \cdot 30^\circ = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

► **Shembulli 2.** Nëse α është kënd prej kuadrantit I dhe $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, t'i caktojmë vlerat e $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ dhe $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Zgjidhje. Prej formulës $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ gjejmë $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, kurse pastaj edhe

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$. Prej $(S_{2\alpha})$, $(C_{2\alpha})$ dhe $(T_{2\alpha})$ gjejmë:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}, \quad \cos 2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7} \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Ta shprehim $\sin 4x$ si funksion prej argumentit x .

Zgjidhje. Kemi $\sin 4x = \sin 2 \cdot 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 2(2 \sin x \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) =$
 $= 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x \blacksquare$

Nëse te formulat adicionele $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$, $(T_{\alpha+\beta})$ dhe $(CT_{\alpha+\beta})$ në vend të α dhe β vëndojmë $\frac{\alpha}{2}$ do t'i fitojmë formulat:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Prej identitetit themelor $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dhe identitetit $(C_{2\alpha})$ i fitojmë edhe këto formula për $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (1)$$

dhe

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \quad (2)$$

Nëse e zgjidhim barazimin (1) sipas $\sin^2 \alpha$, kurse (2) sipas $\cos^2 \alpha$ i fitojmë identitetet:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (3)$$

Nëse në (3) dhe (4) i zëvendësojmë α me $\frac{\alpha}{2}$, i fitojmë formulat:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \text{d.m.th.} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (S_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{d.m.th.} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (C_{\frac{\alpha}{2}})$$

Prej $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ dhe $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ vijnë formulat:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} & (T_{\frac{\alpha}{2}}); & \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} & (CT_{\frac{\alpha}{2}}) \end{aligned}}$$

Identitetet $(S_{\frac{\alpha}{2}})$, $(C_{\frac{\alpha}{2}})$, $(T_{\frac{\alpha}{2}})$, $(CT_{\frac{\alpha}{2}})$ njihen si **formula për funksionet trigonometrike prej gjysmëkëndit**. Gjatë shfrytëzimit të tyre, zgjedhim shenjën „+” ose „-” varësisht prej asaj në cilin kuadrant është këndi $\frac{\alpha}{2}$.

➤ **Shembulli 4.** Ta caktojmë vlerën e saktë të $\cos \frac{5\pi}{8}$.

Zgjidhje. Pasi $\frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4}$, për ta njehsuar vlerën $\cos \frac{5\pi}{8}$ do ta shfrytëzojmë formulën $(C_{\frac{\alpha}{2}})$

për $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, që është kënd prej kuadrantit II, në të cilin kosinusi është negativ, pra kemi:

$$\cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \blacksquare$$

DETYRA

1. Njehso : a) $\sin 2\alpha$ nëse është $\sin \alpha = \frac{12}{13}$; b) $\sin \alpha$ nëse është $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $\sin 2\alpha$ nëse $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

2. Nëse është $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, njehso: a) $\sin \frac{\alpha}{2}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2}$ c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ d) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

3. Nëse $\alpha = 22^\circ 30'$, njehso vlerat e $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, pa zbatimin e kalkulatorit.

4. Nëse $\cos 840^\circ = -\frac{1}{2}$ njehso: a) $\cos 420^\circ$ b) $\cos 210^\circ$ c) $\cos 105^\circ$

Thjeshtoji shprehjet:

5. $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha + 1}$ 6. $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\sin 2\alpha}$

Vërteto identitetet:

7. $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$

8. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$; 15. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

9. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \alpha)$

10. $\frac{1 - \cos \alpha + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

11. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

12. $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

13. $10. \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

2.3.3. TRANSFORMIMI I PRODHIMIT DHE SHUMËS TË FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

Teorema 1. Për çfarëdo vlera të α dhe β të sakta janë formulat:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (C \cdot C)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (S \cdot S)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (S \cdot C)$$

Vërtetim. Nëse i mbledhim anët përkatëse të $(C_{\alpha+\beta})$ dhe $(C_{\alpha-\beta})$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha+\beta})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha-\beta})$$

fitojmë: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, por nëse prej $(C_{\alpha-\beta})$ e zbresim $(C_{\alpha+\beta})$ e fitojmë barasinë

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Nëse në dy barasitë e fundit i pjesëtojmë të dy anët me 2 i fitojmë formulat $(C \cdot C)$ dhe $(S \cdot S)$. Në të njëjtën mënyrë prej formulave:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (S_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (S_{\alpha-\beta})$$

nëse i mbledhim anët e majta dhe të djathta e fitojmë barasinë

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

prej të cilës pas pjesëtimit me 2 e fitojmë formulën $(S \cdot C)$ ♦

➤ **Shembulli 1.** Ta transformojmë në shumë këtë prodhim $2 \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Zgjidhje. } 2 \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}\right) \right] = \cos \frac{11\pi}{24} + \cos \frac{5\pi}{24} \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Ta vërtetojmë identitetin: $2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Zgjidhje. } 2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha + \cos 3\alpha &= 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\alpha - \alpha) - \cos(2\alpha + \alpha)] + \cos 3\alpha = \\ &= \cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2. Për çfarëdo vlera të α dhe β janë të sakta barasitë:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (C + C)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (C - C)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (S + S)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (S - S)$$

edhe për të gjitha $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ janë të sakta barasitë:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (T \pm T)$$

Vërtetim. Për t'i vërtetuar katër formulat e para fusim argumente ndihmëse x dhe y nëpërmjet barasive:

$$x + y = \alpha, \quad x - y = \beta \quad (1)$$

Nëse barazimet (1) i zgjedhim sipas x dhe y , fitojmë

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (2)$$

Nëse tani e shfrytëzojmë formulën $(C \cdot C)$ kemi:

$$\cos \alpha + \cos \beta \stackrel{(1)}{=} \cos(x + y) + \cos(x - y) \stackrel{(C \cdot C)}{=} 2 \cos x \cdot \cos y \stackrel{(2)}{=} 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

kurse ajo është formula $(C + C)$.

Analogjikisht i vërtetojmë tri barasitë tjera (preferojmë, për shkak të përforcimit, të vërtetohen për ushtrime). Për formulat $(T \pm T)$ kemi:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad \blacklozenge$$

➤ **Shembulli 3.** Ta transformojmë në prodhim këtë shumë $1 + \sin \alpha$.

Zgjidhje. Pasi $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, kemi:

$$1 + \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Ta transformojmë në prodhim këtë shumë $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ$.

$$\text{Zgjidhje. } \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 10^\circ + 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} =$$

$$= \sin 10^\circ + 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ = \sin 10^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10^\circ = \cos 80^\circ + \cos 10^\circ =$$

$$= 2 \cos \frac{80^\circ + 10^\circ}{2} \cdot \cos \frac{80^\circ - 10^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 35^\circ = \sqrt{2} \cos 35^\circ \quad \blacksquare$$

1. Njehso shprehjet: a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; b) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$; c) $\sin 105^\circ \cdot \sin 15^\circ$; d) $\cos \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$

Transformoju në prodhim këto shprehje:

2. $\cos 35^\circ - \cos 25^\circ$; 3. $\sin \alpha + \cos \alpha$; 4. $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ$; 5. $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$

Provo saktësinë e barasive (6-8)

6. $\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ = \sqrt{3}$; 7. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$; 8. $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{2\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{4}$

Vërtetoji identitetet: 9. $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$; 10. $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$

11. Transformoju në shumë këto prodhime: a) $\sin 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$ b) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$

Vërtetoji identitetet

12. $2 \cos 2\alpha \cdot \cos - \cos 3\alpha = \cos \alpha$

13. $\sin \alpha - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$

14. $\sin^2 \alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$

15. $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

2.4. BARAZIMET TRIGONOMETRIKE

Barazimi trigonometrik është barasi në të cilën madhësia e panjohur paraqitet vetëm si argument i ndonjë funksioni trigonometrik dhe i saktë vetëm për ndonjë vlerë të caktuar të argumentit (jo identitet). Për shembull, barazimet

$$\sin x = \frac{2}{3}, \quad \sin x + 2 \cos x = 1; \quad \sin^2 x + m \operatorname{tg} x = 0$$

janë barazime trigonometrike, por barazimi

$$5x - \cos x + 1 = 0$$

nuk është barazim trigonometrik, pasi ndryshorja x përfshihet edhe te shprehja $5x$.

Barazim trigonometrik më të thjeshtë (themelor) është barazimi i formës

$$f(x) = m$$

ku $f(x)$ është ndonjëri prej funksioneve themelore trigonometrike. Domethënë, ato janë barazimet e formës

$$\sin x = m, \quad \cos x = m, \quad \operatorname{tg} x = m, \quad \operatorname{ctg} x = m \quad (m \in \mathbb{R})$$

(1)

Barazimet (1) i quajmë *barazime themelore trigonometrike*.

Zgjidhje (rrënjë) e barazimit trigonometrik të dhënë paraqet çdo vlerë të ndryshores (argumentit) për të cilën barazimi është i kënaqur.

Karakteristike për barazimet trigonometrike është ajo se ato ose në përgjithësi nuk kanë zgjidhje, ose kanë bashkësi të pafundme të zgjidhjeve (pse?)

Të zgjidhet barazimi i dhënë trigonometrik, domethënë të caktohen të gjitha zgjidhjet e tij.

Të zgjidhurit e tipeve të ndryshme të barazimeve trigonometrike bazohet në sjelljen në njërin prej barazimeve themelore trigonometrike (1). Metodën me të cilat barazimi i dhënë trigonometrik transformohet deri në barazim prej formës (1) qëndrojnë në transformimin e barazimit në barazime ekuivalente me të. Po ashtu shfrytëzohen identitetet e ndryshme trigonometrike, duke i ruajtur të gjitha rregullat e përgjithshme për zgjidhjen e barazimeve. Më së shpeshti, është e nevojshme të bëhen më shumë transformime të cilat gjithmonë nuk na çojnë nga barazimet ekuivalente, pra për këtë shkak mund të paraqiten edhe rrënjë të reja (për shembull, kuadrimi i të dy anëve të barazimit). Prandaj është e nevojshme, zgjidhja e gjetur të provohet me zëvendësimin te barazimi fillestar.

Për shkak të llojeve të ndryshme të funksioneve trigonometrike vështirë mund të bëhet klasifikimi i tyre.

Së pari i zgjidhim barazimet themelore trigonometrike, zgjidhjet e të cilave duhet t'i mbash mend, pastaj nëpërmjet shembujve do të shikojmë se si zgjidhen disa lloje të barazimeve trigonometrike.

2.4.1. BARAZIMET THEMELORE TRIGONOMETRIKE

1. Barazimi $\sin x = m$. Vërejtëm se bashkësia e vlerave për funksionin $\sin x$ është intervali $[-1, 1]$, d.m.th. për çdo $x \in \mathbb{R}$ vlen $-1 \leq \sin x \leq 1$ ose $|\sin x| \leq 1$. Vijnë, nëse $m < -1$ ose $m > 1$ ($|m| > 1$) barazimi $\sin x = m$ nuk ka kuptim, përkatësisht nuk ka zgjidhje. Për shembull, barazimet: $\sin x = -\frac{3}{2}$ dhe $\sin x = 2$ nuk kanë zgjidhje.

Le të jetë $|m| \leq 1$, d.m.th. $-1 \leq m \leq 1$. Në t.2.4. vërejtëm se këndet që e kënaqin barazimin

$$\sin x = m \quad (2)$$

i caktojmë grafikisht sipas fig. 1. Prej fig. 1a vërejmë se për $0 \leq m < 1$ ekzistojnë dy kënde x_0 dhe $x_1 = \pi - x_0$ prej intervalit $[0, \pi]$ të cilët e kënaqin barazimin (2); nëse $-1 < m \leq 0$ atëherë $x_0, x_1 \in [-\pi, 0]$ dhe $x_1 = -\pi - x_0$ (fig. 1c); nëse $m = 1$, $x_0 = x_1 = \frac{\pi}{2}$ (fig. 1b), kurse për $m = -1$, $x_0 = x_1 = -\frac{\pi}{2}$ (fig. 1ç).

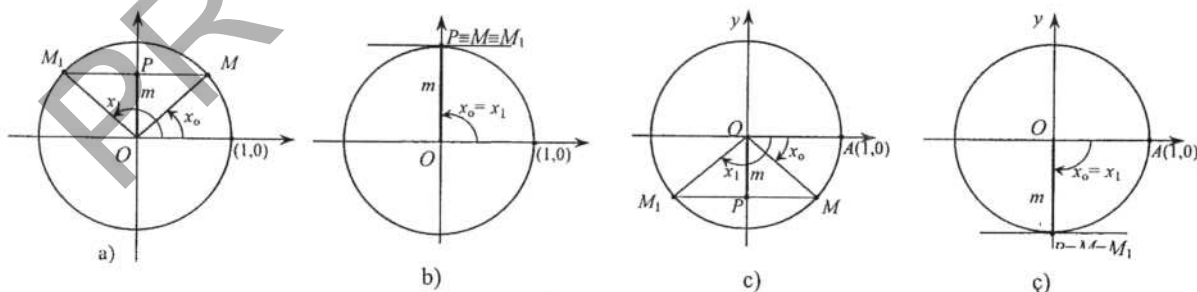


fig.1

Përkufizimi. Këndi më i vogël sipas vlerës absolute që i takon intervalit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kurse është

zgjidhje e barazimit $\sin x = m$, e quajmë **kënd kryesor** ose **zgjidhje kryesore** dhe e shënojmë me $\arcsin m$ (lexojmë: arkussinus prej m), d.m.th.

$$x_0 = \arcsin m \Leftrightarrow \sin(x_0) = m, \quad x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ dhe } |m| \leq 1.$$

Për shembull, $\arcsin 0 = 0$, pasi $\sin 0 = 0$; $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ pasi $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ pasi $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, etj.

Për shkak të periodizimit, zgjidhjet e barazimit (2) janë edhe të gjithë këndet të cilët janë të përmbaaruar me x_0 dhe x_1 , kurse ato janë:

$$x_0 + 2k\pi; \quad x_1 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (3)$$

Bashkësia e të gjitha zgjidhjeve (zgjidhja e përgjithshme) për barazimin (2) në intervalin $(-\infty, \infty)$ është unioni e zgjidhjeve (3), por do ta shkruajmë me formulën:

$$x = [x_0 + 2k\pi, x_1 + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ose} \quad x = \begin{cases} x_0 + 2k\pi \\ x_1 + 2k\pi \end{cases}; \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

➤ **Shembulli 1.** Ta zgjidhim barazimin $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zgjidhje. Së pari e gjejmë zgjidhjen kryesore. Pasi $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zgjidhja kryesore është $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Zgjidhja tjetër në intervalin $[0, \pi]$ është $x_1 = \pi - x_0 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, kurse të gjitha zgjidhjet i fitojmë sipas formulës (4): $x = \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \right] \blacksquare$

➤ **Shembulli 2.** Ta zgjidhim zgjidhjen kryesore dhe të përgjithshme për barazimin $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Zgjidhje. Këtu është $m = -\frac{1}{2}$. Pasi $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, zgjidhja kryesore është $x_0 = -\frac{\pi}{6}$, kurse $x_1 = -\pi - x_0 = -\pi - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{5\pi}{6}$. Sipas (4), zgjidhja e përgjithshme është:

$$x = \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \right] \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Ta zgjidhim barazimin $\sin x = 0,7$.

Zgjidhje. Me ndihmën e kalkulatorit e gjejmë zgjidhjen kryesore:

$x_0 = \arcsin 0,7 = 0,77539$, kurse pastaj e gjemë edhe zgjidhjen $x_1 = \pi - 0,77539$ (në madhësi radiale), ose në madhësi shkallore $x_0 = \arcsin 0,7 = 44^\circ 25'$ dhe $x_1 = 180^\circ - 44^\circ 25' = 135^\circ 35'$

Zgjidhja e përgjithshme është: $x = [0,77539 + 2k\pi, (\pi - 0,77539) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ (në radianë) ose

$$x = [44^\circ 25' + k \cdot 360^\circ, 135^\circ 35' + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ (në shkallë)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \blacksquare$$

2. Barazimi $\cos x = m$. Tërë atë që e theksuam në lidhje me vlerën e konstantes m dhe zgjedhjen e intervalit në të cilin do t'i kërkojmë zgjidhjet themelore për barazimin $\sin x = m$, vlen edhe për barazimin

$$\cos x = m \quad (5)$$

Për $|m| > 1$ barazimi (5) nuk ka zgjidhje, pasi $-1 \leq \cos x \leq 1$ përkatësisht $|\cos x| \leq 1$, (fig.2).

Le të jetë $|m| \leq 1$. Këndet që e kënaqin barazimin (1) i caktojmë grafikisht sipas fig. 1 (përpiqu ta sqarosh mënyrën).

Prej figurës vërejmë se për vlerën e dhënë m ekzistojnë dy kënde kosinusi i të cilit është i barabartë me m , ato janë: x_0 dhe $x_1 = -x_0$. Prej atyre dy këndeve, këndi jonegativ x_0 është në intervalin $[0, \pi]$, kurse x_1 është në intervalin $[-\pi, 0]$, ku nëse $0 < m < 1$, këndi x_0 është kënd i ngushtë (kënd prej kuadrantit I) (fig. 2), por nëse $-1 < m < 0$, atëherë x_0 është kënd i gjerë (kënd në kuadrantin II) (fig.2b).

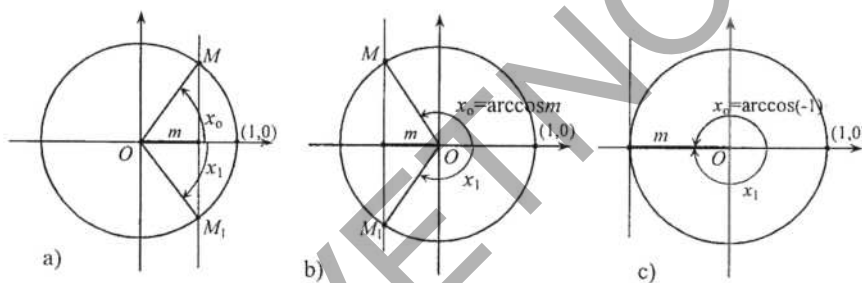


fig.2

Nëse $m = 1$, atëherë $x_0 = x_1 = 0$, kurse për $m = -1$, $x_0 = \pi$, $x_1 = -\pi$ (fig.2c)

Përkufizimi. Këndi më i vogël pozitiv i cili është në intervalin $[0, \pi]$ dhe e kënaq barazimin $\cos x = m$ e quajmë **kënd kryesor** ose **zgjidhje kryesore** të barazimit dhe e shënojmë me $\arccos m$ (lexojmë: arkus kosinus prej m), d.m.th.

$$x_0 = \arccos m \Leftrightarrow \cos x_0 = m, \quad x_0 \in [0, \pi] \text{ dhe } |m| \leq 1.$$

Për shembull, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ pasi $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\arccos 1 = 0$ pasi $\cos 0 = 1$; $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ pasi $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, etj.

Për shkak të periodizimit të kosinusit, bashkësinë e të gjitha zgjidhjeve (zgjidhja e përgjithshme) e barazimit (1) është dhënë me:

$$x_k = \pm x_0 + 2k\pi \quad \text{përkatësisht} \quad x_k = \pm \arccos m + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

► **Shembulli 4.** Ta zgjidhim barazimin $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zgjidhje. Pasi $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vijon se zgjidhja kryesore është $x_0 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, kurse zgjidhja e përgjithshme, në pajtim me formulën (6), është $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ■

3. Barazimi $\operatorname{tg} x = m$. Vërejtëm se bashkësia e vlerave të tangensit është intervali $(-\infty, \infty)$, që do të thotë se m mund të jetë çfarëdo numër real.

Sipas përkufizimit të tangensit në vijën rrethore trigonometrike, zgjidhjen kryesore të barazimit e caktojmë grafikisht sipas fig. 3.

Prej të dy pikave diametrale të kundërta M dhe M_1 me të cilat është përcaktuar këndi (harku) që e ka tangensin të barabartë me m , e para është në gjysmëvijën rrethore të djathtë, kurse e dyta në të majtën.

Përkufizimi. Këndi x_0 në intervalin $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ që e kënaq barazimin $\operatorname{tg} x = m$ është **zgjidhja kryesore** (këndi kryesor) e barazimit $\operatorname{tg} x = m$ dhe e shënojmë me $\operatorname{arctg} m$ (lexojmë: arkustangens prej m), d.m.th.

$$x_0 = \operatorname{arctg} m \Leftrightarrow \operatorname{tg} x_0 = m \text{ dhe } x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), m \in (-\infty, \infty),$$

Nëse $m \geq 0$, atëherë $0 \leq x_0 < \frac{\pi}{2}$; kurse për $m < 0$, $-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0$.

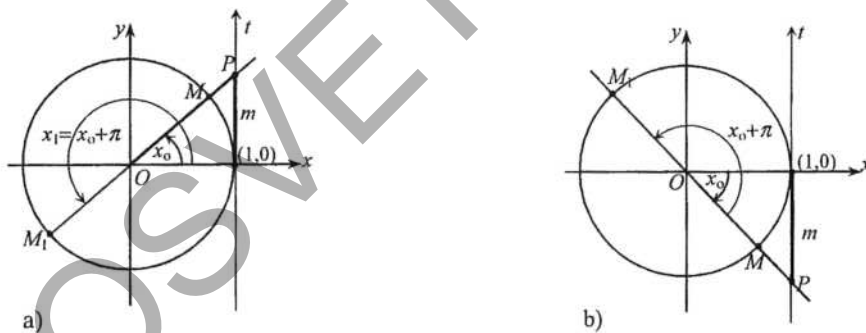


fig.3

Për shembull, $\operatorname{arctg} 0 = 0$ pasi $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ pasi $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$, etj.

Për shkak të periodizimit, bashkësinë e të gjitha zgjidhjeve (zgjidhja e përgjithshme) e fitojmë sipas formulës

$$x = x_0 + k\pi = \operatorname{arctg} m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Nëse k është numër çift, d.m.th. $k=2n$, fitohen këndet (harqet) që mbarojnë në pikën e njëjtë si edhe $x_0 = \operatorname{arctg} m$, por nëse k është numër tek, $k=2n+1$, fitohen këndet (harqet) që mbarojnë në pikën diametralisht të kundërt.

➤ **Shembulli 5.** T'i zgjidhim barazimet: a) $\operatorname{tg} x = 1$; b) $\operatorname{tg} x = -2,5$.

Zgjidhje. a) Zgjidhja kryesore është $x_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, kurse zgjidhja e përgjithshme është

$$x = x_0 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Për zgjidhjen kryesore, me kalkulator gjejmë: $x_0 = \operatorname{arctg}(-0,25) = 68,198^\circ = -68^\circ 11' 52''$ ose në radianë $x_0 = -1,1902$. Zgjidhja e përgjithshme është $x = -68,198^\circ + k \cdot 180^\circ$ ose në radianë $x = -1,1902 + k\pi$ ■

4. Barazimi $\operatorname{ctg} x = m$, $m \in (-\infty, \infty)$. Zgjidhjet e këtij barazimi i përcaktojmë grafikisht sipas fig.4.

Përkufizimi. Këndi (harku) x_0 prej intervalit $(0, \pi)$ që e kënaq barazimin $\operatorname{ctg} x = m$ e quajmë **kënd kryesor** ose **zgjidhje kryesore** për barazimin $\operatorname{ctg} x = m$, dhe e shënojmë me $x_0 = \operatorname{arcctg} m$ (lexojmë: arkuskotangens prej m), d.m.th.

$$x_0 = \operatorname{arcctg} m \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x_0 = m, \quad x_0 \in (0, \pi), \quad m \in (-\infty, \infty).$$

Nëse $m \geq 0$, atëherë $0 < x_0 \leq \frac{\pi}{2}$, kurse për $m < 0$, $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.

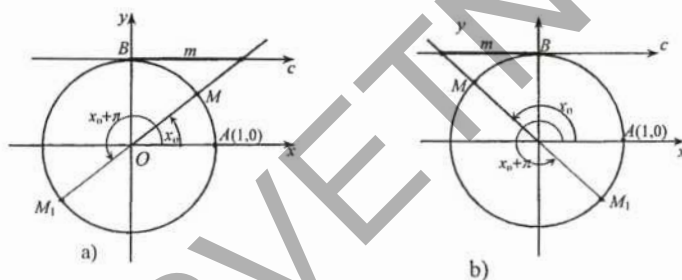


fig.4

Bashkësia e të gjitha zgjidhjeve (zgjidhja e përgjithshme) është dhënë me formulën:

$$x = x_0 + k\pi = \operatorname{arcctg} m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(8)

➤ **Shembulli 6.** T'i zgjidhim barazimet: a) $\operatorname{ctg} x = 1$; b) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Zgjidhje. a) Zgjidhja kryesore është $x_0 = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, pasi $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, kurse zgjidhja e përgjithshme është $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ■

b) Zgjidhja kryesore është $x_0 = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, pasi $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

zgjidhja e përgjithshme është $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ■

1. Cilët prej këtyre barazimeve nuk kanë zgjidhje:

a) $\sin x = \frac{2}{3}$; b) $\cos x = \sqrt{2}$; c) $2 \sin x = \sqrt{5}$; ç) $\operatorname{tg} x = 1,2$; d) $\operatorname{ctg} x = 0$; e) $\frac{1}{2} \cos x = 1$

Zgjidhi barazimet themelore trigonometrike:

2. a) $\sin x = 0$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x = \frac{3}{4}$. 3. a) $\cos x = 1$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos x = -0,8$.

4. a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg} x = -1$; c) $\operatorname{tg} x = 1,3$. 5. a) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\operatorname{ctg} x = -1$; c) $\operatorname{ctg} x = -3$

Zgjidhi barazimet trigonometrike:

6. $\sin x = \sin(-15^\circ)$ 7. $\cos x = \cos \frac{\pi}{18}$ 8. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ 9. $\sin x = \cos \frac{5\pi}{6}$

2.4.2. ZGJIDHJA E DISA BARAZIMEVE TRIGONOMETRIKE

1. Barazimet e formës

$$a \sin(bx + c) + d = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad (1)$$

i zgjidhim ashtu që me zëvendësimin $bx + c = t$, i transformojmë deri te barazimi themelor trigonometrik $\sin t = -\frac{d}{a}$, të cilin tani më e vërejtëm se si zgjidhet. Në të njëjtën mënyrë edhe barazimet e formës (1) në të cilat në vend të funksionit sinus, paraqiten funksionet kosinus, tangens ose kotangens, përkatësisht barazimet e formës:

$$a \cos(bx + c) + d = 0, \quad a \operatorname{tg}(bx + c) + d = 0, \quad a \operatorname{ctg}(bx + c) + d = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

► **Shembulli 1.** Ta zgjidhim barazimin $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$.

Zgjidhje. Kemi $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, për të cilit zgjidhja e përgjithshme është:

$$x = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right]$$

► **Shembulli 2.** Ta zgjidhim barazimin $2 \sin 5x + 1 = 0$

Zgjidhje. Së pari e shkruajmë barazimin në formë $\sin 5x = -\frac{1}{2}$, kurse pastaj me zëvendësimin

$$5x = t, \text{ e transformojmë në barazimin } \sin t = -\frac{1}{2}, \text{ për të cilin zgjidhjet janë } t = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \\ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nëse kthehemi në ndryshoren paraprake, d.m.th. në vend të t zëvendësojmë $5x$, por pastaj të dy anët i pjesëtojmë me 5, i fitojmë zgjidhjet e barazimit:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{5}(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi); \\ \frac{1}{5}(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi); \end{cases} \quad k \in Z, \text{ përkatësisht } x = \begin{cases} -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}; \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}; \end{cases} \quad k \in Z \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Ta zgjidhim barazimin $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Zgjidhje. Me zëvendësimin $2x + \frac{\pi}{3} = t$ barazimin e dhënë e shkruajmë në formën $\sin t = \frac{1}{2}$ për

të cilin zgjidhja e përgjithshme është: $t = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \\ (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in Z$. Nëse në vend të t

zëvendësojmë $2x + \frac{\pi}{3}$ dhe barasitë e fituara i zgjidhim sipas x e fitojmë barazimin e kërkuar:

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \\ \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \\ \frac{3\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in Z, \text{ përkatësisht } x = \begin{cases} -\frac{\pi}{12} + k\pi; \\ \frac{3\pi}{12} + k\pi; \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacksquare$$

2. Shembujt e barazimeve të cilët transformohen në barazime të formës paraprake

➤ **Shembulli 4.** Ta zgjidhim barazimin: $\sin^2 x + \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$.

Zgjidhje. Në pamje të parë, sikurse është dhënë barazimi nuk është prej formës paraprake, por, me transformime të zakonshme, duke marrë parasysh tani më identitetet e njohura, kemi me radhë:

$$\sin x \cos x = 1 - \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = 0; \quad \sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi, k \in Z, \text{ përkatësisht } x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 5.** Ta zgjidhim barazimin $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

Zgjidhje. E transformojmë së pari anën e majtë të barazimit:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$$

ku barazimin e dhënë e shkruajmë në formën $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Zgjidhja e këtij barazimi është: $x = \frac{1}{2}(\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = \pm \frac{2\pi}{6} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacksquare$

Vërejtje. Më së shpeshti mënyra për transformimin e barazimit të dhënë trigonometric nuk është e vetme. Varësisht prej asaj cilët relacione ndërmjet funksioneve trigonometrike do t'i shfrytëzojmë, barazimin mund ta sjellim deri në barazime të formës së ndryshme.

➤ **Shembulli 6.** Ta zgjidhim barazimin $\cos 2x + \cos^2 x = 2$.

Zgjidhje. Mënyra I. Zëvendësojmë $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ dhe i fitojmë barazimet me radhë:

$$3\cos^2 x = 3, \quad \cos^2 x = 1, \quad \cos x = \pm 1$$

Domethënë, barazimi i dhënë është ekuivalent me bashkësinë e barazimeve:

$$1. \cos x = -1, \quad x = (2k+1)\pi \quad 2. \cos x = 1, \quad x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vijon, zgjidhje e barazimit të dhënë është unioni prej të gjitha zgjidhjeve, përkatësisht zgjidhja është bashkësia:

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mënyra II. Zëvendësojmë $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ dhe fitojmë me radhë:

$$\cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2, \quad 3\cos 2x + 1 = 4, \quad 3\cos 2x = 3,$$

$$\cos 2x = 1$$

Zgjidhje e barazimit të fundit është $2x = 2k\pi$, përkatësisht $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ■

Një metodë praktike për zgjidhjen e barazimeve trigonometrike është barazimi i dhënë me transformime të ndryshme trigonometrike ta sjellim në formën:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_k(x) = 0$$

ku $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ janë barazime trigonometrike prej formës themelore ose prej formës paraprake të shqyrtuar (1). Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit të dhënë është unioni prej zgjidhjeve të barazimeve $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

➤ **Shembulli 7.** Ta zgjidhim barazimin $\sin 2x = \cos^2 x$.

Zgjidhje. Duke zëvendësuar $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ barazimin e shkruajmë në formën

$$2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0, \quad \text{d.m.th.} \quad \cos x(2\sin x - \cos x) = 0$$

Barazimi i fundit është ekuivalent me bashkësinë e barazimeve

$$\cos x = 0 \quad \text{ose} \quad 2\sin x - \cos x = 0.$$

Zgjidhjet e barazimit të parë janë: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Barazimi i dytë pas pjesëtimit me $\cos x \neq 0$ (pse?) kalon në barazimin $\tan x = \frac{1}{2}$, zgjidhja e së cilës është

$x = \arctg \frac{1}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zgjidhja e barazimit të dhënë është bashkësia:

$$x = \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}; \arctg \frac{1}{2} + k\pi \right] = \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}; 0,463 + k\pi \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 8.** Ta zgjidhim barazimin $\sin 7x - \cos 4x = \sin x$.

Zgjidhje. E shkruajmë barazimin në formën:

$$(\sin 7x - \sin x) - \cos 4x = 0$$

Duke e zbatuar formulën për transformim (S-S) fitojmë me radhë:

$$2 \sin \frac{7x-x}{2} \cos \frac{7x+x}{2} - \cos 4x = 0, \quad 2 \sin 3x \cos 4x - \cos 4x = 0, \quad \cos 4x(2 \sin 3x - 1) = 0.$$

Barazimi i fundit është ekuivalent me bashkësinë $\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ 2 \sin 3x - 1 = 0 \end{cases}$, prej ku zgjidhja e barazimit të dhënë është bashkësia:

$$x = \left[\frac{(2k+1)\pi}{8}; \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

3. Barazimet të cilat me transformim dhe zëvendësim të përshtatshëm sillen në barazim katror algjebrik në lidhje të një funksioni trigonometrik prej një argumenti të njëjtë.

Këto janë barazime të cilat me transformime ekuivalente sillen në barazime prej formës:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \quad a \cos^2 x + b \cos x + c = 0, \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Të gjitha këto raste sjellin deri te zgjidhja e dy llojeve të barazimeve:

1. të zgjidhurit e barazimit algjebrik të shkallës II në lidhje me të panjohurën

$$\sin x = t, \cos x = t \text{ ose } \operatorname{tg} x = t$$

2. të zgjidhurit e barazimeve trigonometrike prej formës themelore $\sin x = m$, $\cos x = m$ ose $\operatorname{tg} x = m$, ku m është rrënjë e barazimit algjebrik, por numri i së cilës varet prej numrit të rrënjëve të barazimit përkatës algjebrik.

➤ **Shembulli 9.** Ta zgjidhim barazimin $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Zgjidhje. Nëse vëndojmë $\sin x = t$ fitojmë barazim katror në lidhje me ndryshoren t :

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

Rrënjët e këtij barazimi janë: $t_1 = -1$ dhe $t_2 = \frac{1}{2}$, pra barazimi i dhënë është ekuivalent me bashkësinë e të dy barazimeve themelore trigonometrike:

$$\sin x = -1 \quad \text{dhe} \quad \sin x = \frac{1}{2},$$

zgjidhjet e të cilave janë: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dhe $x = \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Prandaj,

zgjidhja e barazimit të dhënë është bashkësia $x = \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$

➤ **Shembulli 10.** Ta zgjidhim barazimi: $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

Zgjidhje. Nëse zëvendësojmë $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ barazimin e dhënë e transformojmë në barazim $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, kurse kjo me barazimin $\cos x = t$ e sjellim në barazim katror $2t^2 - t - 1 = 0$, rrënjët e të cilave janë $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Domethënë, barazimi i dhënë është ekuivalent me bashkësinë e barazimeve.

$$\cos x = 1 \quad \text{dhe} \quad \cos x = -\frac{1}{2},$$

për të cilat zgjidhjet janë: $x = \pm \arccos 1 + 2k\pi = 2k\pi$ dhe $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, pra

$$\text{zgjidhja e barazimit të dhënë është bashkësia } x = \begin{cases} 2k\pi; \\ \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

► **Shembulli 11.** Ta zgjidhim barazimin $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$.

Zgjidhje. Nëse në barazimin e dhënë zëvendësojmë $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, e fitojmë barazimin:

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$$

prej ku gjejmë $(\sin x)_1 = -\frac{1}{2}$ dhe $(\sin x)_2 = \frac{4}{3}$. Pasi $\frac{4}{3} > 1$ barazimi i dytë nuk ka zgjidhje. Prandaj

$$\text{zgjidhja e barazimit është bashkësia } x = \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

► **Shembulli 12.** Ta zgjidhim barazimin $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Zgjidhje. Nëse të dy anët e barazimit i pjesëtojmë me $\cos^2 x \neq 0$ e fitojmë barazimin

$$3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0, \quad \text{përkatësisht} \quad 3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0.$$

Rrënjët e këtij barazimi janë: $(\tan x)_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6}$ përkatësisht

$$(\tan x)_1 = \sqrt{3}; \quad (\tan x)_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vijon, zgjidhja e barazimit të dhënë është bashkësia: $x = \left[\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, \right] \quad k \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$

► **Shembulli 13.** Ta zgjidhim barazimin $\sin x + \sin 4x + \sin 7x = 0$.

Zgjidhje. Sipas formulës (C+C) për transformimin e shumës së sinusëve në prodhim kemi:

$$\sin x + \sin 7x = 2 \sin 4x \cos 3x$$

pra barazimin e dhënë mund ta shkruajmë në formën:

$$\sin 4x \cdot (1 + 2 \cos 3x) = 0,$$

i cili është ekuivalent me bashkësinë e zgjidhjeve

$$[\sin 4x = 0, 1 + 2 \cos 3x = 0.$$

Zgjidhja e kësaj bashkësie është $x = \left[\frac{k\pi}{4}; \frac{6k \pm 2\pi}{9}, \right] \quad k \in \mathbb{Z}$, që paraqet zgjidhje edhe të barazimit të dhënë.

► **Shembulli 14.** Ta zgjidhim barazimin $\cos x \cdot \cos 5x = 1$

Zgjidhje. Pasi $\cos t \in [-1, 1]$, barazimi i dhënë është i kënaqur vetëm për ato vlera të numrave realë x për të cilët njëkohësisht është

$$\text{I. } \cos x = 1 \text{ dhe } \cos 5x = 1 \quad \text{ose} \quad \text{II. } \cos x = -1 \text{ dhe } \cos 5x = -1.$$

Në rastin e parë zgjidhja është:

$$x = 2k\pi, \quad 5x = 2m\pi, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \text{ perkatesisht } x = 2k\pi, \quad x = \frac{2m\pi}{5}$$

Zgjidhjen e përbashkët e gjejmë prej kushtit $2k\pi = \frac{2m}{5}\pi$, prej ku $m = 5k$, pra fitojmë

$$x = \frac{2 \cdot 5k}{5}\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I})$$

Në rastin e dytë: $x = (2k-1)\pi$, $5x = (2m-1)\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Ngjashëm sikurse edhe në rastin e parë gjejmë se

$$x = (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{II})$$

Prej (I) dhe (II) vijon se të gjitha zgjidhjet e barazimit të dhënë janë $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ■

DETYRA

Zgjidhi këto barazime trigonometrike:

1. a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; b) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$
2. a) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0,5$; b) $\operatorname{tg}(x - 25^\circ) = 1$; c) $\sqrt{2} \cos(x - 45^\circ) = 1$.
3. a) $\sin(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}) = 1$; b) $\operatorname{tg}(\frac{x}{4} + 10^\circ) = -1$; c) $2 \cos 2x + \sqrt{3} = 0$

Me futjen e të panjohurës së re zgjidhi barazimet trigonometrike:

4. $6 \sin^2 x - 7 \sin x + 2 = 0$; 5. $\cos^2 x + \cos x = 0$;
6. $3 \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$; 7. $3 \operatorname{ctg}^2 2x - 8 \operatorname{ctg} 2x = -5$

Me transformime të përshtatshme zgjidhi barazimet trigonometrike:

8. $4 \cos^2 x + 4 \cos x + \sin^2 x = 0$; 9. $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x = 5$;
10. $\frac{5 + \operatorname{tg} x}{1 + 2 \operatorname{tg} x} = \frac{15 + \operatorname{tg} x}{3 - \operatorname{tg} x}$; 11. $4 \cos^4 x - 7 \cos^2 x + 3 = 0$;
12. $\sin x + \sqrt{3 + \sin^2 x} = 3$; 13. $\sin 2x - \sin x = 0$;
14. $\sin 2x - \operatorname{tg} x = 0$; 15. $\sin x + \sin 3x = 0$

2.5. TË ZGJIDHURIT E ÇFARËDO TREKËNDËSHI

Të përkujtohem!

Në trekëndësh kemi 6 elemente themelore, kurse ato janë brinjët dhe këndet.

Të zgjidhet ndonjë trekëndësh, domethënë, me numër sa më të vogël (minimal) të elementeve të dhëna të caktohen të gjitha elementet e tij themelore.

Trekëndëshi njëvlerësisht është përcaktuar nëse dihen tre elemente themelore prej të cilave të paktën njëri është brinjë. Të zgjidhet trekëndëshi, domethënë, me tre elemente të dhëna (prej të cilave njëra brinjë) të caktohen tre elementet themelore tjera

Vitin e kaluar shkollor u njohëm me katër detyra themelore me të cilat e zgjidhnim trekëndëshin kënddrejtë. Në rastin e çfarëdo trekëndëshi, të katër detyrat themelore për zgjidhjen e trekëndëshit janë:

Detyra I. Të zgjidhet trekëndëshi nëse është dhënë një brinjë dhe dy kënde;

Detyra II. Të zgjidhet trekëndëshi nëse janë dhënë dy brinjë dhe këndi përballë brinjës më të madhe;

Detyra III. Të zgjidhet trekëndëshi nëse janë dhënë dy brinjë dhe këndi ndërmjet tyre;

Detyra IV. Të zgjidhet trekëndëshi nëse janë dhënë gjatësitë e të gjitha brinjëve.

Këto katër detyra i zgjidhim në bazë të dy teoremave të njohura si **teorema e sinusit dhe teorema e kosinusit**.

Me marrëveshje, në trekëndëshin e dhënë ABC brinjët i shënojmë me a, b, c , kurse këndet përballë këtyre brinjëve me α, β, γ , përkatësisht.

2.5.1. TEOREMA E SINUSIT

Teorema. Në çdo trekëndësh brinjët janë proporcionale me sinusët e këndeve të përballta:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

dhe vlen

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

ku R është rrezja e vijës rrethore të jashtëshkruar rreth trekëndëshit të dhënë.

Vërtetim. Në trekëndëshin ABC e tërheqim lartësinë h_c ndaj brinjës c (fig. 1a). Prej trekëndëshave kënddrejtë ADC dhe DBC në fig. 1a kemi:

$$h_c = b \sin \alpha \text{ dhe } h_c = a \sin \beta \quad (1)$$

Nëse trekëndëshi është këndgjerë dhe lartësia është jashtë prej trekëndëshit (fig. 1b), vlejné barasitë e njëjta (1):

$$\text{prej } \triangle ADC: h_c = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha, \text{ kurse}$$

$$\text{prej } \triangle DBC: h_c = a \sin \beta.$$

Më tutje, prej barasisë (1) fitojmë

$$b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

prej ku vijon

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta \text{ përkatësisht } a : \sin \alpha = b : \sin \beta \quad (2)$$

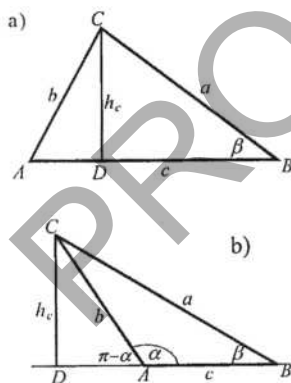


fig.1

Analogjikisht, nëse e tërheqim lartësinë h_a do të tregojmë se (kontrollo)

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma, \quad \text{përkatësisht} \quad b : \sin \beta = c : \sin \gamma \quad (3)$$

Prej (2) dhe (3) vijon $a : \sin \alpha = b : \sin \beta = c : \sin \gamma$ përkatësisht

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Duhet të tregojmë edhe se këto raporte janë të barabarta me diametrin e vijës rrethore të jashtëshkruar rreth trekëndëshit. Për këtë qëllim rreth trekëndëshit ABC përshkruajmë vijë rrethore $k(O, R)$. Për njërin prej këndeve të brendshëm, për shembull α janë të mundshëm tre raste:

I. α është kënd i ngushtë; **II.** α është kënd i gjerë; **III.** α është kënd i drejtë.

Do të tregojmë se në çdonjërin prej tri rasteve vlen

$$a = 2R \sin \alpha \quad \text{përkatësisht} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R. \quad (4)$$

Rast'i I. Le të jetë $\angle \alpha$ kënd i ngushtë (fig.2). Nëpër njërin prej dy kulmeve tjerë, për shembull B , e tërheqim diametrin e vijës rrethore të jashtëshkruar k dhe e shqyrtojmë trekëndëshin ndihmës A_1BC i cili është kënddrejtë (teorema e Talesit). Poasht'u kemi: $\angle BAC = \angle BA_1C$, përkatësisht $\alpha = \alpha_1$ (si kënde periferike mbi harkun e njëjtë BC). Prej trekëndëshit kënddrejtë A_1BC kemi: $\frac{a}{2R} = \sin \alpha_1 = \sin \alpha$, prej ku vijon (4).

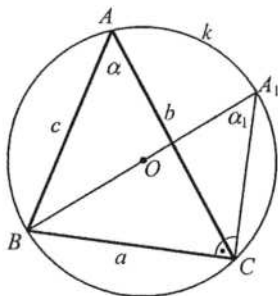


fig.2

Rast'i II. Le të jetë $\angle \alpha$ kënd i gjerë (fig. 3). Me konstruktimin sikurse në rastin paraprak e fitojmë katërkëndëshin kordiak ABA_1C , në të cilin vlen:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \quad \text{d.m.th.} \quad \alpha_1 = 180^\circ - \alpha.$$

Prej trekëndëshit kënddrejtë A_1CB kemi:

$$\frac{a}{2R} = \sin \alpha_1 = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

prej ku vijon:

$$a = 2R \sin \alpha.$$

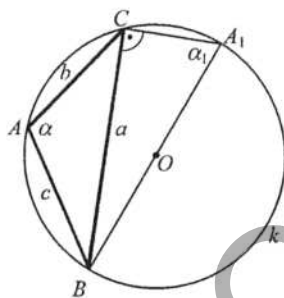


fig.3

Rast'i III. Le të jetë $\alpha = 90^\circ$ (fig.4). Atëherë

$$a = 2R = 2R \sin \frac{\pi}{2} = 2R \sin \alpha.$$

Analogjikisht tregohet se edhe për këndet β dhe γ vlejné barasitë

$$b = 2R \sin \beta, \quad \text{përkatësisht} \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R,$$

$$c = 2R \sin \gamma, \quad \text{përkatësisht} \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \blacklozenge$$

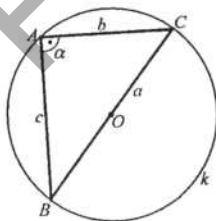


fig.4

➤ **Shembulli 1.** Të vërtetojmë se në trekëndësh në të cilin njëri kënd është 30° brinja e cila shtrihet përballë tij është e barabartë me rrezen e vijës rrethore të jashtëshkruar rreth atij trekëndëshi.

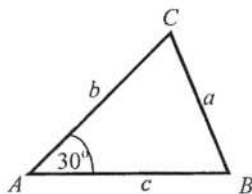


fig.5

Zgjidhje. Prej teoremës së sinusit, sipas figureës 5, kemi:

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

prej ku

$$a = 2R \sin 30^\circ = 2 \cdot R \cdot \frac{1}{2} = R$$

➤ **Shembulli 2.** Në trekëndëshin ABC (fig.6) janë dhënë këndet: $\alpha = 41^\circ$, $\beta = 77^\circ$ dhe brinja $a = 74$. Të caktojmë këndin γ dhe brinjët b dhe c .

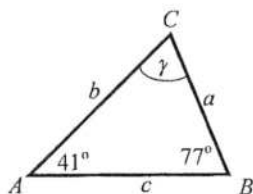


fig.6

Zgjidhje. Pasi na janë dhënë dy kënde dhe një brinjë, duke e zgjidhur trekëndëshin ABC në realitet, do ta zgjidhim

Detyrën I themelore.

Prej $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, kemi:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (41^\circ + 77^\circ) = 62^\circ.$$

Prej teoremës së sinusit kemi $\frac{74}{\sin 41^\circ} = \frac{b}{\sin 77^\circ} = \frac{c}{\sin 62^\circ}$ prej ku gjejmë:

$$b = \frac{74 \sin 77^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{74 \cdot 0,97437}{0,65605} = \frac{72,10338}{0,65605} = 109,9 \text{ dhe } c = \frac{74 \sin 62^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{74 \cdot 0,88294}{0,65605} = \frac{65,33812}{0,65605} = 99,59$$

➤ **Shembulli 3.** Të provojmë a është përcaktuar trekëndësh nëse na janë dhënë:

- këndi $\alpha = 126^\circ$ dhe brinjët $a = 12$ dhe $b = 7$;
- këndi $\alpha = 30^\circ$ dhe brinjët $a = 10$, $b = 20$

Zgjidhje. a) Na janë dhënë dy brinjë dhe këndi përballë brinjës më të madhe. Duhet ta zgjidhim **detyrën II** themelore.

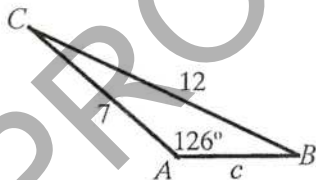


fig.7

Të supozojmë se me elementet e dhëna themelore është përcaktuar trekëndëshi ABC (fig.7). Prej teoremës së sinusit kemi:

$$\frac{12}{\sin 126^\circ} = \frac{7}{\sin \beta},$$

Nëse këtë barasi e zgjidhim sipas $\sin \alpha$ e fitojmë barazimin:

$$\sin \beta = \frac{7 \cdot \sin 126^\circ}{12} = \frac{7 \cdot 0,80901}{12} = \frac{5,66311}{12} = 0,47192$$

zgjidhjet e së cilës në intervalin $(0, \pi)$ janë: $\beta_1 = 28,2^\circ$ dhe $\beta_2 = 151,8^\circ$. Zgjidhja e dytë β_2 nuk i përgjigjet kushtit të detyrës, pasi trekëndëshi nuk mund të ketë dy kënde të gjerë. Domethënë, $\beta = 28,2^\circ$ është kënd i vetëm që i përgjigjet kushteve të detyrës.

Tani e caktojmë edhe këndin γ : $\gamma = 180^\circ - (126^\circ + 28,2^\circ) = 25,8^\circ$.

Brinjën e tretë c e caktojmë prej barasisë: $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$, përkatësisht

$$\frac{c}{\sin 25,8^\circ} = \frac{12}{\sin 126^\circ}, \text{ prej ku fitojmë } c = \frac{12 \cdot \sin 25,8^\circ}{\sin 126^\circ} = \frac{12 \cdot 0,43523}{0,80901} = \frac{5,22277}{0,80901} = 6,5.$$

Domethënë prej elementeve të dhëna është caktuar i vetmi trekëndësh.

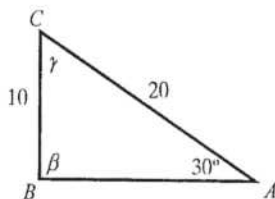


fig.8

b) Në të njëjtën mënyrë si edhe në rastin paraprak gjejmë (fig.8):

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 20 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{10} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Vijon $\beta = 90^\circ$, që do të thotë se trekëndëshi është kënddrejtë, me hipotenuzën $b = 20$. Kësht'u kemi: $\gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, kurse brinjën e tretë c e caktojmë me ndihmën e teotemës së Pitagorës:

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \quad \blacksquare$$

► **Shembulli 4.** Të provojmë a është përcaktuar trekëndësh ABC kur janë dhënë:

a) brinjët $a = 95$, $b = 117$ dhe këndi $\alpha = 65^\circ$; b) brinjët $a = 10$, $b = 11$ dhe këndi $\alpha = 57^\circ$.

Zgjidhje. a) Prej teoremës së sinusit kemi $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$ ose $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$, prej ku gjejmë

$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 117 \cdot \frac{\sin 65^\circ}{95} = 1,116 > 1$, kurse ky barazim nuk ka zgjidhje. Domethënë, me elementet e dhëna nuk është përcaktuar trekëndësh, përkatësisht detyra nuk ka zgjidhje.

b) Sikurse nën a) kemi $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 11 \cdot \frac{\sin 57^\circ}{10} = 0,922 < 1$. Zgjidhjet e barazimit $\sin \beta = 0,9225$ janë: $\beta_1 = \arcsin 0,922 = 67,30^\circ$ dhe $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 67,30^\circ = 112,70^\circ$.

Për $\beta_1 = 67,30^\circ$ fitojmë trekëndësh AB_1C (fig.9) me kënde $\alpha, \beta_1, \gamma_1$ dhe brinjë a, b, c_1 , ku

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) = 180^\circ - (57^\circ + 67,30^\circ) = 55,70^\circ,$$

kurse brinjën c_1 e gjejmë prej kushtit

$$\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \text{d.m.th.} \quad c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin 55,70^\circ}{\sin 57^\circ} = 9,85.$$

Për zgjidhjen $\beta_2 = 112,70^\circ$ fitojmë trekëndësh AB_2C (fig.9) me kënde $\alpha, \beta_2, \gamma_2$ dhe brinjë a, b, c_2 ku $\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_2) = 180^\circ - (57^\circ + 112,70^\circ) = 10,30^\circ$, kurse për c_2 kemi:

$$\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \text{d.m.th.} \quad c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin 10,30^\circ}{\sin 57^\circ} = 2,132.$$

Domethënë, me elementet e dhëna janë përcaktuar dy trekëndësha të ndryshëm

► **Shembulli 5.** Ta caktojmë trekëndëshin ABC nëse $a = 70$, $b = 65$ dhe këndin $\alpha = 40^\circ$.

Zgjidhje. Kët'u $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 65 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{70} = 0,5969 < 1$, prej ku gjejmë

$$\beta_1 = \arcsin 0,5969 = 36,65^\circ \text{ dhe } \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 143,35^\circ$$

Pasi $\alpha + \beta_2 = 40^\circ + 143,35^\circ > 180^\circ$, zgjidhja β_2 nuk përcakton trekëndësh.

Cakto trekëndëshin për zgjidhjen $\beta = \beta_1$ ($\gamma = 103,35^\circ$, $c = 106$) ■

► **Shembulli 6.** Të vërtetojmë: nëse janë $0 < \beta_1 < 90^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ atëherë $90^\circ < \beta_2 < 180^\circ$ dhe $\sin \beta_2 = \sin \beta_1$.

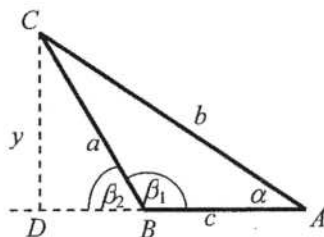


fig.10

Zgjidhje. Le të jetë β_2 kënd në trekëndëshin ABC (fig. 10). Sipas vizatimit,

$$y = a \sin \beta_1 \text{ (prej } \triangle BCD) \quad (1)$$

$$y = b \sin \alpha \text{ (prej } \triangle ACD). \quad (2)$$

Nga ana tjetër, sipas teoremës së sinusit për $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta_2} \quad (3)$$

Prej (1), (2) dhe (3) kemi: $a \sin \beta_1 = b \sin \alpha$ dhe $a \sin \beta_2 = b \sin \alpha$, prej ku vijon $\sin \beta_1 = \sin \beta_2$. ■

DETYRA

Zgjidhe trekëndëshin ABC nëse:

- $a = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
- $b = \sqrt{6}$, $c = 2\sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$;
- $R = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$;
- $R = 2\sqrt{6}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$;
- Njehso perimetrin dhe syprinën e paralelogramit ABCD nëse $\overline{AB} = 8$, $\overline{BD} = 13 (=d_1)$, $\alpha = 60^\circ$

2.5.2. TEOREMA E KOSINUSIT

Teorema. Në çdo trekëndësh katrori i njëres brinjë të tij është i barabartë me shumën prej katrorëve të dy brinjëve tjera, minus prodhimi i dyfishtë i atyre brinjëve dhe kosinusi të këndit ndërmjet tyre. Domethënë, të sakta, janë barasitë:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Vërtetim. Duhet t'i shqyrtojmë rastet kur këndi është i ngushtë, i gjerë dhe i drejtë.

Rast'i I. Le të jetë këndi α i ngushtë, d.m.th. $0 < \alpha < 90^\circ$ (fig.1). Prej trekëndëshit BDC, sipas teoremës së Pitagorës $a^2 = h^2 + (b-x)^2$, kurse prej trekëndëshit BDA:

$$h^2 = c^2 - x^2 \text{ dhe } x = c \cos \alpha.$$

Vijon, $a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx$ përkatësisht $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

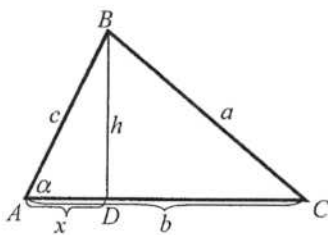


fig.1

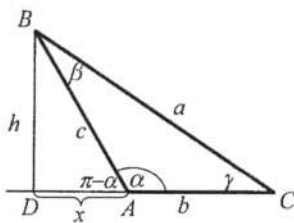


fig.2

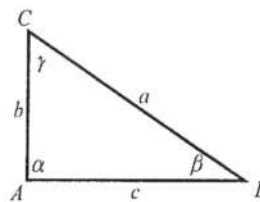


fig.3

Rast'i II. Le të jetë $\alpha > 90^\circ$ (fig.2). Prej trekëndëshit BDC kemi

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2,$$

kurse prej trekëndëshit BDA : $h^2 = c^2 - x^2$ dhe $x = c \cos(\pi - \alpha) = -c \cos \alpha$, prej ku vijon

$$a^2 = h^2 + b^2 + x^2 + 2bx = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 + 2bx = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Rast'i III. Le të jetë $\alpha = 90^\circ$. Sipas fig. 3 kemi $a^2 = b^2 + c^2$, prej ku vijon

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Vërejmë se kur këndi është 90° , atëherë teorema e kosinusit kalon në teoremën e Pitagorës.

Analogjikisht vërtetohen edhe dy barasitë tjera prej (II) ♦

Nëpërmjet disa shembujve do të vërejmë se si me ndihmën e teoremës së kosinusit i zgjidhim Detyrat themelore III dhe IV për çfarëdo trekëndësh.

► **Shembulli 1.** Ta zgjidhim trekëndëshin ABC nëse na janë dhënë dy brinjë: $a = 3\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$ dhe këndi ndërmjet tyre $\gamma = 130^\circ$.

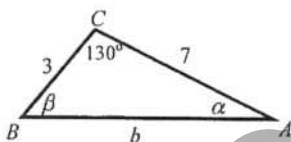


fig.4

Zgjidhje. Sipas elementeve të dhëna, duhet ta zgjidhim detyrën III. Pasi na janë dhënë dy brinjë në trekëndësh dhe këndi ndërmjet tyre, duke përdor teoremën e kosinusit menjëherë mund ta gjejmë brinjën e tretë në trekëndësh. Sipas shenjave në fig. 4 kemi::

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 130^\circ = 85,0,$$

prej ku $c = \sqrt{85,0} \approx 9,22\text{cm}$. Tani mund t'i gjejmë edhe këndet tjera në trekëndësh. Prej barasisë $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, e zgjidhur sipas $\cos \alpha$ kemi:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Nëse në këtë shprehje i zëvendësojmë a , b , c me vlerat e tyre fitojmë:

$$\cos \alpha = \frac{7^2 + 9,22^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 9,22} = \frac{125,00}{129,08} = 0,968,$$

prej ku vijon

$$\alpha = \arccos 0,968 = 14,53^\circ = 14^\circ 31' 48''$$

dhe

$$\beta = 180^\circ - (14,53^\circ + 130^\circ) = 35,07^\circ = 35^\circ 4' \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Gjatësitë e brinjëve janë 5, 10 dhe 12. Ta zgjidhim trekëndëshin.

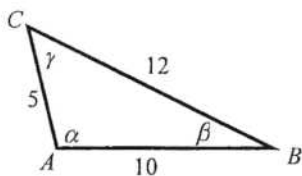


fig.5

Zgjidhje. Kemi ta zgjidhim Detyrën themelore IV. Sipas shënimeve në fig. 5 kemi:

$$1. \cos \alpha = \frac{5^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 5 \cdot 10} = -0,19 \Rightarrow \alpha \approx 101,0^\circ$$

$$2. \cos \beta = \frac{12^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 12 \cdot 10} = 0,9125 \Rightarrow \beta \approx 24,1^\circ$$

$$3. \gamma \approx 180^\circ - (101,0^\circ + 24,1^\circ) = 54,9^\circ \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Për trekëndëshin ABC në fig.6 ta caktojmë gjatësinë e segmentit CD.

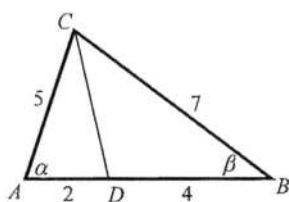


fig.6

Zgjidhje. Së pari, prej teoremës së kosinuset për trekëndëshin ABC (fig.6) gjejmë:

$$\cos \alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0,2,$$

kurse pastaj e zbatojmë teoremën e kosinuset për trekëndëshin ADC prej ku fitojmë:

$$\overline{CD}^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 0,2 = 25 \quad \text{d.m.th.} \quad \overline{CD} = \sqrt{25} = 5 \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Të dy brinjët e paralelogramit janë $a=4$ dhe $b=3$, kurse këndi ndërmjet tyre $\alpha=45^\circ$. Ta njehsojmë këndin γ ndërmjet diagonaleve.

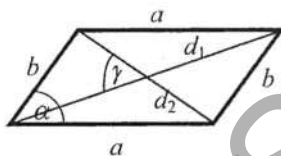


fig.7

Zgjidhje. Sipas shënimeve në fig. 7 kemi:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad (1)$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha) \quad (2) \text{ dhe}$$

$$b^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \gamma \quad \text{d.m.th.}$$

$$b^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} - \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \cos \gamma$$

prej ku në pajtim me (1) dhe (2):

$$\cos \gamma = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha}}$$

Nëse në shprehjen e fundit zëvendësojmë $a=4$, $b=3$, $\alpha=45^\circ$, fitojmë

$$\cos \gamma = \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{(4^2 + 3^2)^2 - 4 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cos^2 45^\circ}} = \frac{7}{\sqrt{4^4 + 3^4}} = \frac{7}{\sqrt{337}} = \frac{7}{18,36} = 0,38$$

prej ku gjejmë

$$\gamma = \arccos 0,38 = 67,7^\circ \blacksquare$$

➤ **Shembulli 5.** Të tregojmë se për çfarëdo paralelogram shuma e katrorëve të diagonaleve është e barabartë me shumën e katrorëve të brinjëve.

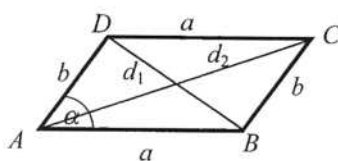


fig.8

Zgjidhje (fig. 8). Duke e zbatuar teoremën e kosinuset për trekëndëshin ABD dhe ABC , i fitojmë relacionet:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

Nëse i mbledhim anët e majta dhe të djathta të të dy barasive e fitojmë relacionin e kërkuar:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 \blacksquare$$

DETYRA

Caktoji brinjët e trekëndëshit nëse:

1. $a=13$, $c=8$, $\alpha=120^\circ$

2. $a+b=20$, $c=15$, $\beta=60^\circ$

3. $b-a=2$, $c=8$, $\alpha=60^\circ$

4. Njehso gjatësinë e vijës së rëndimit t_c në $\triangle ABC$ nëse: $a=8$, $c=6$, $\beta=60^\circ$

5. Vërteto se në trekëndëshin me brinjë 3, 5 dhe 7 këndi më i madh është 120° .

6. Njehso krahët c dhe d të trapezit $ABCD$ nëse: $a=13$, $b=3$, $\alpha=82^\circ 49'$, $\beta=42^\circ 25'$

7. Njehso këndet e ngushta α dhe β të trapezit $ABCD$ nëse: $a=12$, $b=4$, $c=7$, $d=6$

2.5.3. ZBATIMI I TEOREMAVE NË DISA DETYRA NGA PRAKTIKA

Nëpërmjet disa shembujve do të vërejmë se si me zbatimin e teoremës së sinusit dhe kosinuset mund të zgjidhim detyra të ndryshme nga gjeometria, gjeodezia dhe fizika.

Gjatë zgjidhjes së detyrave të këtilla do t'i shfrytëzojmë konceptet: **këndi i elevacionit** dhe **këndi i depresionit**, prandaj së pari t'i përkufizojmë konceptet.

Këndi i ngushtë α i formuar prej drejtëzës horizontale dhe drejtëzës në të cilën vërejtësi e shikon ndonjë objekt mbi vijën horizontale quhet **kënd i elevacionit** (fig.1a)

Këndi i ngushtë α i formuar prej drejtëzës horizontale dhe drejtëzës në të cilën vërejtësi e shikon ndonjë objekt nën vijën horizontale quhet **kënd i depresionit** (fig.1b)



fig.1

➤ **Shembulli 1.** Në majën e kodrës të lartë h metra ka statujë (BC në fig.2) të lartë 70 metra. Prej pikës A në rrëzën e kodrës shikohet baza e statujës nën këndin e elevacionit $27,75^\circ$, kurse maja e statujës shikohet nën këndin e elevacionit $28,30^\circ$. Të caktohet lartësia h e kodrës.

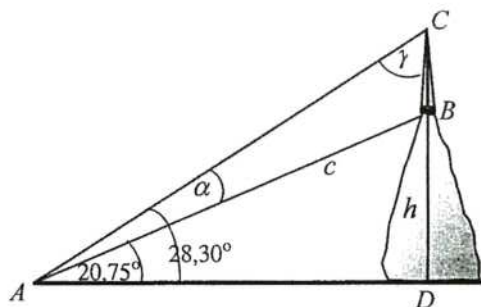


fig.2

Zgjidhje. Prej trekëndëshit kënddrejtë ADB

(fig.2) kemi:

$$\sin 20,75^\circ = \frac{h}{c}, \text{ përkatësisht } h = c \sin 20,75^\circ.$$

Duhet ta caktojmë c ?

Në trekëndëshin ABC : $\alpha = 28,30^\circ - 20,75^\circ = 7,55^\circ$ dhe

$$\gamma = 90^\circ - 28,30^\circ = 61,70^\circ.$$

Prej teoremës së sinusit për trekëndëshin ABC kemi:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{70}{\sin \alpha} \text{ d.m.th. } c = \frac{70 \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{70 \sin 61,70^\circ}{\sin 7,55^\circ}.$$

$$\text{Vijon, } h = c \sin 20,75^\circ = \frac{70 \sin 61,70^\circ}{\sin 7,55^\circ} \cdot \sin 20,75^\circ = 166,2 \text{ m.} \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Dy biçiklistë lëvizin me shpejtësi konstante duke u nisur prej pikës së njëjtë C . Ata lëvizin sipas gjatësisë të shtigjeve paralele të ndara (fig. 3). Biçiklisti i parë arrin deri te pika A për 70 min. Pas një kohe biçiklisti i dytë arrin deri te pika B . Nëse këndi CAB është 105° kurse këndi CBA është 50° , sa minuta kanë qenë të nevojshme për biçiklistin e dytë që të arrijë prej C deri në B ?

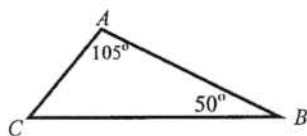


fig. 3

Zgjidhje. Rruga e kaluar S gjatë lëvizjes drejtvizore të barabartë për kohën t dhe shpejtësinë konstante v caktohet me barasinë

$$S = vt.$$

Vijon $\overline{CA} = 70v$ dhe $\overline{CB} = tv$, kurse sipas teoremës së sinusit në $\triangle ABC$ vlen

$$\frac{70v}{\sin 50^\circ} = \frac{tv}{\sin 105^\circ},$$

$$\text{prej ku gjejmë } t = \frac{70 \sin 105^\circ}{\sin 50^\circ} = 88 \text{ min } 16 \text{ sek.} \blacksquare$$

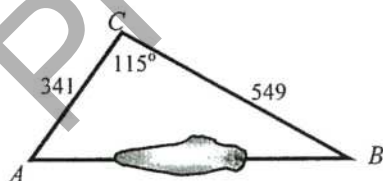


fig.4

➤ **Shembulli 3.** Dy vende A dhe B janë ndarë me një pyll të pakalueshëm. Për t'u caktuar largësia d ndërmjet tyre është zgjedh pika C (fig. 4) e arritshme deri te A dhe B dhe poasht'u janë mat madhësitë:

$$\overline{CA} = 341 \text{ m, } \overline{CB} = 549 \text{ m dhe } \varphi = \angle ACB = 115^\circ.$$

Ta caktojmë largësinë d ndërmjet vendeve A dhe B .

Zgjidhje. Sipas teoremës së kosinusit kemi:

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{CA}|^2 + |\overline{CB}|^2 - 2|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cos \varphi$$

Nëse i zëvendësojmë vlerat e matura e caktojmë gjatësinë d :

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{341^2 + 549^2 - 2 \cdot 341 \cdot 549 \cdot \cos 115,5^\circ} = 760,8 \text{ m}$$

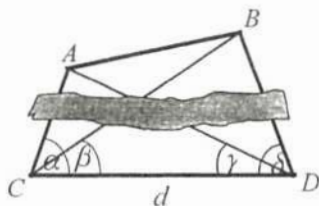


fig.5

► **Shembulli 4.** Ta caktojmë largësinë ndërmjet dy pikave të parritshme por të shikuara A dhe B.

Zgjidhje. Për ta zgjidhur detyrën zgjedhim dy pika C dhe D (fig.5), të cilat janë në relacion, për shembull, $d=20\text{m}$ dhe i masim këndet α, β, γ dhe δ . Le të jenë matur:

$$\alpha=52^\circ 1'; \beta=42^\circ 40'; \gamma=81^\circ 15'; \delta=86^\circ 40'.$$

Prej trekëndëshit BDC gjejmë

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \delta} = \frac{d}{\sin(180^\circ - (\beta + \delta))} = \frac{d}{\sin(\beta + \delta)},$$

përkatësisht

$$\overline{BC} = \frac{d \sin \delta}{\sin(\beta + \delta)} = \frac{20 \sin 86,40^\circ}{\sin 130,20^\circ} = \frac{19,9605}{0,7637} = 26,1365 \approx 26.$$

Ngjashëm, prej trekëndëshit ACD kemi:

$$\overline{AC} = \frac{d \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{20 \cdot \sin 81^\circ 15'}{\sin(52^\circ 1' + 81^\circ 15')} = \frac{20 \cdot 0,9883}{0,7281} = 27,14 \approx 27.$$

Tani në trekëndëshin ACB kemi dy brinjë të njohura AC dhe BC dhe $\angle ACB = \alpha - \beta$ dhe sipas teoremës së kosinuset mund ta caktojmë gjatësinë e AB:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\alpha - \beta) \text{ përkatësisht } \overline{AB}^2 = 27^2 + 26^2 - 27 \cdot 26 \cdot \cos 9^\circ 21' = 812,33, \\ \text{prej ku gjejmë } \overline{AB} = 28,5 \text{ m.}$$

DETYRA

1. Dy aeroplan (në pikat A dhe B në fig.1) janë në lartësi 2300m dhe 1800m, përkatësisht. Të dy aeroplanët fluturojnë mbi kullën e aeroportit T. Prej T aeroplani A shikohet nën këndin e elevacionit 4° , kurse aeroplani B nën këndin e elevacionit $2,5^\circ$. Sa janë të larguar aeroplanët njëri prej tjetrit?
2. Vërejtësi i bregut të detit është i lartë $h=165,5\text{m}$ shikon në të njëjtin rrafsh vertical dy anije nën këndin e depresionit $\alpha=24^\circ 18'$ dhe $\beta=8^\circ 12'$. Sa është largësia ndërmjet anijeve?
3. Metri i lartësisë së aeroplanit tregon lartësinë prej 927m. Në atë moment prej aeroplanit shikohet rrënza e një kulle nën këndin e depresionit $\alpha=42^\circ 37'$, kurse maja e saj $\beta=39^\circ 54'$. Sa është lartësia e kullës?
4. Vërejtësi gjendet në 500m largësi prej vendit të fluturimit të balonit vertikalisht lartë, me shpejtësi konstante. Cakto shpejtësinë e balonit, nëse vërejtësi në një moment e ka shikuar balonin nën këndin prej $\alpha=10^\circ 24'$, kurse pas 5 minutë nën këndin $\beta=68^\circ 32'$.
5. Prej pikës A në largësi 14cm prej një pasqyre të rrafshët bije rreze e dritës nën këndin $\alpha=44^\circ 25'$, kthehet prej pikës B dhe reflektohet në pikën C. Cakto largësinë ndërmjet pikave A dhe C nëse $\overline{BC}=18\text{cm}$.
6. Në rrafshin e mënjauar me këndin e mënjanimi $\alpha \approx 36^\circ 52' 12''$ është vendosur ngarkesë $Q=220\text{N}$. Çfarë forcë nevojitet që ta pengojë rrëshqitjen.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Njehso vlerat e funksioneve trigonometrike për këndin prej 75° .

2. Është dhënë këndi α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) i atillë që $\cos \alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Njehso $\cos 2\alpha$ dhe pastaj caktoje këndin α .

3. Njehsoje vlerat e funksioneve trigonometrike për këndin $\frac{\pi}{8}$

Njehso:

4. $\sin 405^\circ$, $\cos 450^\circ$, $\operatorname{tg} 405^\circ$, $\operatorname{ctg} 450^\circ$. 5. $\sin^2 x - \cos^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x$ nëse $x = \frac{37\pi}{6}$.

6. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ nëse $\alpha = -\frac{13}{3}\pi$ 7. $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$ 8. $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

Thjeshtoji shprehjet:

9. $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x$ 10*. $\sin x - \cos x$ 11. $1 - \sin x - \cos 2x$

Transformoji në prodhim këto shprehje:

12. $\sin 70^\circ - \cos 40^\circ$ 13. $\sin x \operatorname{tg} x + \sin x$.

Vërtetoji identitetet:

14. $\sin^2(x + 45^\circ) + \sin^2(x - 45^\circ) = 1$ 15. $\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{ctg}(45^\circ - x) = 0$

16. $\frac{\sin x - 2 \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$ 17. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x = 2$

18. $\frac{2 \sin x - 2 \sin 2x}{\sin x + \sin 2x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ 19. $\frac{\cos 3x - \cos x}{4 \cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}} = -4 \cos^2 \frac{x}{2}$

20. $2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x) + \sin 2x - 1 = 0$ 21. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2$

22. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 0,125$ 23. $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 0,25$

24. $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 25. $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

26. $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = 0,25$

Zgjidhi barazimet trigonometrike:

27. $2 \sin 3x = \sqrt{3}$ 28. $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{2}{3} x + 1 = 0$ 29. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$

30. $\sin 2x + \cos x = 0$ 31. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$ 32*. $\sin x + \operatorname{tg} x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$

33. $4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} - 1) \sin x - \sqrt{2} = 0$

34. Vizatoje grafikun e funksionit $y = -\sin x - 1$.

35. Shqyrtoje vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $y = 3 \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$

36. Shqyrtoje vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $y = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Zgjidhi trekëndëshat:

37. $c = 123$, $\alpha = 35^\circ 12'$, $\beta = 80^\circ 20'$ 38. $b = 475,6$; $c = 213,4$; $\alpha = 49^\circ 15' 24''$

39. $a = 67$, $b = 43$, $c = 36$

40. Vërteto se gjatësia e vijës së rëndimit m_A , e tërhequr prej kulmit A të trekëndëshit ABC vlen:

$$m_A^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}), \text{ ku } a, b, c \text{ janë brinjët e trekëndëshit.}$$

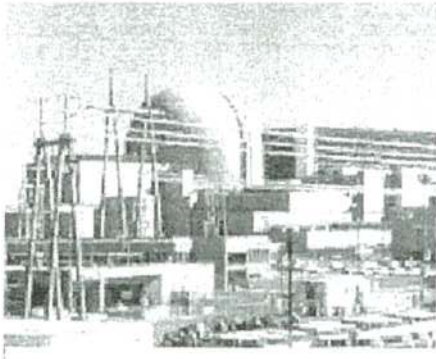
41. Indeksi i reflektimit të ujit në lidhje me ajrin është $\frac{4}{3}$. Njehso këndin e reflektimit β , nëse këndi hyrës të rrezes së dritës është $\alpha = 60^\circ$.

42. Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtëshkruar në trekëndësh nëse janë dhënë brinjët e tij: $a = 8$, $b = 12$, $c = 15$.

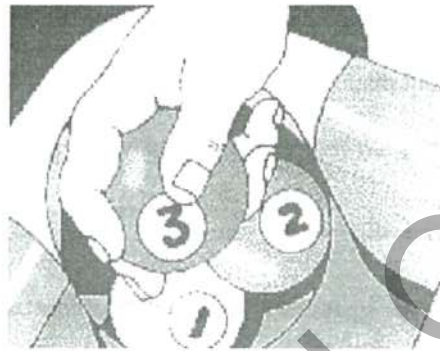
43. Njehso syprinën e rombit nëse janë dhënë brinja e tij $a = 8,5$ dhe këndi i ngushtë $\alpha = 28,5^\circ$

44. Njehso diagonalet e delltoidit me brinjë $a = 8,5$, $b = 5$ dhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 120^\circ$.

PTOLEMAJ KLAUDIJ (Ptolemaeus Claudis) (shekull II.) – astronom, gjeometër, gjeograf i vjetër grek, përfaqësues i shkollës së Aleksandrisë. Vepra e tij më e njohur *Megalis sintaksis* është ruajtur në përkthimin arab me emrin *Almagest*. Ajo përmban trembëdhjetë libra, në të cilat është vendosur e tërë njohuria për astronominë. Në të janë vendosur përmbajtje nga trigonometria rrafshinore dhe sferike, prandaj llogaritet si teksti i parë nga trigonometria..



Centrali nuklear



A luajmë bixhoz me ardhmërinë!

*Qëllimi themelor i çdo shkence është t'i parasheh sendet.
Matematika është shkenca themelore e parashikimeve.*

Çka thotë matematika për gjasën prej katastrofës të mundshme ekologjike nga incidenti nuklear në centralet nukleare?

Në njehsimet gjatë ndërtimit të centraleve të para nukleare, pa përvojë eksperimentale, teoretikisht supozoheshte se gjasa prej incidenteve të mëdhaja nukleare matet me radhë të madhësisë prej 10^{-8} . Megjithatë, 20 vjet më vonë, u ndërtuan me qindra centrale të mëdhaja nukleare dhe ndodhën dy incidente të mëdhaja nukleare në ato: në ishullin Tri Mili (SHBA) dhe qytetin Çernobil (Rusi). Kjo do të thotë se gjasa eksperimentale (gjasë a posteriori) është:

$$\frac{2}{100} = 2\%.$$

Kjo është gjasë shumë e madhe. Sa? - treguan pasojat e tmershme për jetën e njerëzve, personat e invalidizuar, dëmet materiale, jo qetësi të njerëzimi prej katastrofave të ardhshme eventuale nukleare.

Për ilustrim çka do të thotë gjasë e sipërme do të tregojmë në shembuj prej përvojës së njeriut ku ai ka një periudhë më të gjatë të veprimit:

-Në prodhimin industrial gjatë shkartit prej 2%, shiriti për prodhim aspak nuk lëshohet, veçanërisht për prodhime të shtrejta.

-Në aviacion nëse rreziku prej incidenteve teknike që do të shkaktonte rënien e aeroplanit është 2%, ai aspak nuk fluturon.

Pasiguria për ardhmërinë duhet të na përkujton se Toka është vendi i vetëm për jetë të lumtur (gjër më tani). Se nuk duhet të luajmë bixhoz me mjete për jetë dhe punë që të mos e humbim planetin tonë të kaltër-gjelbër, mjaft flet shembulli i sipërm.

Por si qëndrojnë punët me bixhozin në lojërat për fat, mund të shikoni prej kur t'i përvetësoni përmbajtjet nga tema që vijon, tema për kombinatorikën dhe gjasën.

ELEMENTET E KOMBINATORIKËS DHE GJASËS

Shumë dukuri paraqiten në natyrë dhe në jetën e përditshme ne jemi në gjendje saktë t'i parashikojmë dhe sqarojmë në bazë të njohurive të shkaqeve për paraqitjen e tyre. Për disa jemi të sigurtë se do të ndodhin: errësimi i Hënës, periodizimi i të ardhurave dhe shpenzimeve, lidhja me pasojë e zbrazjes elektrike në re dhe bubullima etj. Por, ekzistojnë edhe dukuri për të cilat nuk mund me siguri të parashikohet paraqitja dhe rasti i ndodhisë dhe atëherë themi se me gjasë do të ndodh: loja e fatit, tërmete etj. Gjithashtu jemi të ndërgjegjshëm se paraqitja e tyre realizohet sipas ligjshmërisë së caktuar, pasi edhe ato i shkaktojnë shkaktes të caktuar. Atëherë kuptojmë madhësinë e detyrës dhe duke mos i gjetur të gjitha zgjidhjet e mundshme sjellim përfundim sipas parashikimit tonë, cili në atë moment na duket më i logjikshëm. Njeriu mëson në shembuj, por, që të nxirret përfundim për tu zgjidhur problemi është me të vërtetë shkathtësi. Disiplina matematikore që i studion këto ligjshmëri quhet **teoria e gjasës**.

3.1. KOMBINATORIKA

Në lidhje të ngushtë me teorinë e gjasës, si edhe për nevojat në nxjerrjen e njehsimeve në të, është edhe një disiplinë tjetër e matematikës. Edhe ajo është zhvilluar prej nevojave praktike të njeriut. Përkatësisht, në jetë shpeshherë ballafaqohemi me nevojën për radhitjen e sendeve, aktiviteteve, shenjave, shkronjave etj. Radhitjen dhe grupimin e tyre e bëjmë sipas kriteriumit të momenteve dhe nevojave dhe interesave të përhershme. Megjithatë edhe në këtë rast ekzistojnë rregulla dhe ligjshmëri. Disiplina e matematikës e cila merret me studimin e radhitjeve dhe grupimeve të mundshme të elementeve të bashkësisë së fundme quhet **kombinatorika**. Kombinatorika mëson nënbashkësitë prej bashkësive të dhëna ose grupe prej më shumë elemente të bashkësisë së dhënë. Varësisht prej mënyrës të formimit të tyre dhe prej asaj a është e rëndësishme, ose jo, radhitja e elementeve në ato, dallojmë **variacione, permutacione dhe kombinacione**.

Shumica e vërtetimeve për variacionet, permutacionet dhe kombinacionet mund të nxirren me zbatimin e të ashtuquajturit **parimi i induksionit matematikor** dhe prandaj në fillim të kësaj teme do t'i shqyrtojmë përmbajtjet dhe thelbin e atij parimi.

3.1.1. INDUKSIONI MATEMATIKOR

Metoda e vërtetimit, se një gjykim është i vërtetë për çdo numër natyror quhet **metoda e induksionit matematikor**. Fuqia e kësaj metode bëhet e qartë kur do të kuptojmë se provë të hollësishme të çdo rasti të veçant nuk është e mundshme (bashkësia e numrave natyrorë është e pafundme). Kjo metodë bazohet në parimin e induksionit matematikor. Induksioni, si metodë e të mësuarit me të cilën arrihet deri te e vërteta, është bazuar në vështrimin e të veçantës dhe përfundimi për të përgjithshmen.

Parimi i induksionit matematikor

Një gjykim për numrat natyrorë është i vërtetë:

1^o. nëse është i vërtetë për numrin natyror 1,

2^o. nëse prej supozimit se është i vërtetë për numrin natyror k , ($k \geq 1$) mund të vërtetohet se është i vërtetë edhe për numrin natyror $k+1$.

Mënyra e vërtetimit e cila bazohet në parimin matematikor quhet edhe metoda e induksionit të plotë matematikor. Theksimi i përplotëshmërisë, nënkupton se ekziston edhe metoda e induksionit jo të plotë i ashtuquajtur induksioni empirik, i cili përbëhet prej asaj që prej vërtetimit për vërtetësi të ndonjë gjykimi për numrat natyrorë 1, 2, 3, 4, ... nxirret përfundimi se gjykimi është i saktë për çdo numër natyror. Përkatesisht, metoda e induksionit jo të plotë, bazohet në vështirimet e numrit të kufizuar të rasteve të veçanta dhe nxirret përfundimi i përgjithshëm i cili duhet të vlejë për të gjitha rastet prej atij lloji. Por, përfundimet e atilla gjithmonë nuk është e thënë të jenë të vërteta edhe sa do të jetë i madh numri i rasteve të shqyrtuara. Në historinë e matematikës janë të njohura përfundimet jo të vërteta të fituara me induksion jo të plotë matematikor. Një përfundim i atillë jo i saktë është gjykimi i matematikanit francez Pjer Ferma (1601-1665), se të gjithë numrat e formës $2^{2^n} + 1$ janë të thjeshtë. Me të vërtetë ai është i saktë për $n=1, 2, 3, 4$, ku janë fituar numrat 5, 17, 257, 65537 të cilët janë të thjeshtë. Megjithatë, përfundimi ka qenë i gabuar, pasi matematikani gjerman Leonard Ojleri (1707-1783) ka treguar se për $n=5$ numri $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ është numër i përbërë, pasi plotëpjesëtohet me 641. Më vonë janë gjetur edhe 37 numra të përbërë prej formës $2^{2^n} + 1$. Edhe për rastin e vlerës së shprehjes $n^2 - 79n + 1601$ ($n \in \mathbb{N}$), se është numër i thjeshtë mund të nxirret përfundim i gabueshëm, pasi $n=1, 2, 3, \dots, 79$ ai është numër i thjeshtë, por tani për $n=80$ shprehja bëhet numër i përbërë.

Metoda e induksionit matematikor shpeshherë shfrytëzohet për konstatimin e gjykimeve të vërteta, përfundime ose formula deri të cilat është arritur me induksionin jo të plotë. Ato janë gjykimet të cilat përmbajnë numër natyror n edhe për të cilët është provuar se vlejnë për $n=1, 2, 3, \dots$. Me metodën e induksionit matematikor konstatohet se ai gjykim a vlen dhe për çfarëdo numër natyror n .

> **Shembulli 1.** Të vërtetohet se $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ku $n \in \mathbb{N}$.

Zgjidhje. E provojmë barasinë për $n=1$ dhe fitojmë $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

Të supozojmë se barasia është e saktë për numrin natyror $n=k$, d.m.th. le të vlejë:

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Tani ta vërtetojmë saktësinë e gjykimit për $n=k+1$. Kemi:

$$(1+2+3+\dots+k)+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1),$$

$$\text{dhe pasi } \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2},$$

$$\text{kemi: } 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \text{ Sipas kësaj gjykimi është i saktë për } n=k+1.$$

Domethënë sipas parimit të induksionit matematikor, gjykimi është i saktë për çdo numër natyror.

➤ **Shembulli 2.** Të vërtetojmë se për çdo numër natyror n , numri n^2+n+2 plotëpjesëtohet me 2.

Zgjidhje. Me $p(n)$ e shënojmë gjykimin $2 \mid n^2+n+2$.

E provojmë saktësinë e gjykimit për $n=1$. Kemi $1^2+1+2=4$, kurse $2 \mid 4$. Domethënë $p(1)$ është gjykim i saktë.

Të supozojmë se gjykimi është i saktë për $n=k$, d.m.th. le të jetë e saktë $p(k)$, domethënë $2 \mid k^2+k+2$, atëherë $k^2+k+2=2a$, ku a është ndonjë numër natyror.

Tani ta vërtetojmë saktësinë e gjykimit për $n=k+1$. Për atë qëllim shqyrtojmë:

$$(k+1)^2+(k+1)+2=k^2+2k+1+k+1+2=(k^2+k+2)+(2k+2)=2a+2(k+1)=2(a+k+1)=2b,$$

ku $a+k+1=b$. Domethënë është i saktë edhe gjykimi $p(k+1)$.

Sipas parimit të induksionit matematikor gjykimi se numri n^2+n+2 plotëpjesëtohet me 2 është i saktë për çdo numër natyror.

Ekzistojnë gjykime të cilët janë të vërtetë duke filluar prej numrit natyror n_0 i cili është më i madh
1. Në atë rast parimi i induksionit matematikor formulohet në këtë mënyrë:

Parimi 2. Një gjykim është i vërtetë për çdo numër natyror $n \geq n_0$:

1⁰. nëse është i vërtetë për numrin natyror n_0 ($n_0 \geq 1$),

2⁰. nëse prej supozimit se është i vërtetë për numrin natyror k ($k \geq n_0$), mund të vërtetohet se është i vërtetë edhe për numrin natyror $k+1$.

Mund të vërehet se parimi i induksionit matematikor është rast i veçantë i parimit 2.

➤ **Shembulli 3.** Ta vërtetojmë jobarasinë $2^n > 2n+1$, ku n është numër natyror më i madh se 2.

Zgjidhje. Për $n=1$ dhe $n=2$ jobarasia është jo e saktë. Provo!

E provojmë saktësinë e tij për $n=3$ dhe kemi $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, prej ku vijon $8 > 7$, që është i saktë.

Të supozojmë saktësinë për $n=k$ ($k \geq 3$), d.m.th. le të vlejë $2^k > 2k+1$. Ngel që të vërtetojmë saktësinë e gjykimit për $n=k+1$. Poashtu prej $2k > 1$, kemi:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (2k+1) = 2k+2k+2 = 2(k+1) + 2k > 2(k+1) + 1,$$

domethënë jobarasia vlen për çdo numër natyror më i madh prej numrit 2.

DETYRA

Vërteto se për çdo numër natyror n janë të sakta këto gjykime:

1. $1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2$.

2. $2+4+6+ \dots + 2n = n(n+1)$.

3. $1^2+2^2+3^2+ \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$
5. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$
6. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}.$
7. $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$
8. $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}, (a \neq 1).$
9. Vërteto se për çdo numër natyror n , numri:
 - a) $6^{2n} - 1$ plotëpjesëtohet me 35, b) $2^n + 5^{n+1}$ plotëpjesëtohet me 3, c) $n(n+1)$ plotëpjesëtohet me 2, d) $n(n+1)(n+2)$ plotëpjesëtohet me 3, e) $n^3 - n$ plotëpjesëtohet me 6.
10. Vërtetoji jobarasitë:
 - a) $2^n > n, n \geq 1,$ b) $3^n \geq 3n, n \geq 0.$
11. Me induksionin matematikor provo saktësinë e formulave:
 - a) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n + 1,$ b) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1}.$

3.1.2. VARIACIONET

Le të jetë dhënë bashkësia e fundme $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ elementet e së cilës mund të jenë njerëz, sende, shkronja, shenja etj.

Çdo radhitje (grup) i numrit të dhënë të elementeve prej bashkësisë M në grupe, të atillë që të dallohen njëra prej tjetrës nga përbërja e elementeve ose sipas radhitjes së tyre, quhet *variacion*. **Këto grupe prej elementeve, nënbashkësi të bashkësisë M , të cilat ndryshojnë njëri prej tjetrit sipas radhës së elementeve në to, quhen variacione.** Varësisht prej numrit të elementeve në variacion, ai mund të jetë i klasës 1 nëse ka vetëm një element, prej klasës 2 nëse ka dy elemente etj. Elementet e një variacioni mund të jenë të ndryshme dhe disa prej tyre ose të gjitha të jenë të njëjta, prandaj do ta shfrytëzojmë termin variacion pa përsëritje dhe variacion me përsëritje. Tani mund t'i përkufizojmë variacionet edhe me përsëritje prej klasës k .

1. Variacionet pa përsëritje

Përkufizimi. Variacionet pa përsëritje të klasës k prej n elemente ($k \leq n$) janë k nënbashkësitë e radhitura prej elementeve të ndryshme të bashkësisë M .

Numri i variacioneve pa përsëritje prej klasës k prej bashkësisë me n elemente shënohet me: V_n^k .

Gjatë radhitjes së elementeve parashtrihen dy detyra themelore:

- të shkruhen dhe të radhiten të gjitha variacionet e mundshme,
- të njehsohet numri i tyre.

► **Shembulli 1.** T'i formojmë të gjitha variacionet pa përsëritje prej bashkësisë

$M=\{1, 2, 3\}$ dh ta vërejmë numrin e tyre.

Zgjidhje. Variacionet e klasës së parë janë vet elementet: 1, 2, 3.

Variacionet e klasës së dytë janë të gjitha çiftet e radhitura: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

Variacionet e klasës së tretë janë të gjitha treshet e radhitura: 123, 132, 213, 231, 312, 321. ■

Në diagram degëzor do ta ilustrojmë mënyrën e formimit të variacioneve pa përsëritje të klasës së parë, dytë dhe tretë të bashkësisë $M=\{1, 2, 3\}$.

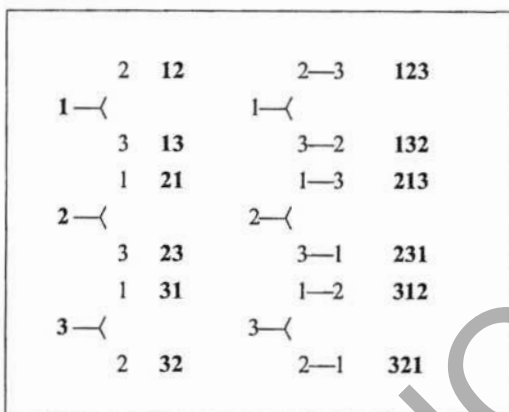


fig. 1a

fig. 1b

Variacionet e klasës së parë janë paraqitur në shtyllën e parë në fig. 1a. Domethënë ka 3.

Variacionet e klasës së dytë formohen ashtu që elementeve të klasës së parë u shoqërohen elementet tjera (për shembull, 1 i shoqërohet 2 dhe pastaj 3), ato janë paraqitur në shtyllën e tretë të fig. 1a. Domethënë ka $6 = 3 \cdot 2$.

Variacionet e klasës së tretë formohen ashtu që çifteve të cilat paraqesin variacion prej klasës dytë u shoqërohen elementet tjera, ato janë paraqitur në shtyllën e katërt të fig. 1b.. Domethënë ka $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Si njehsohet numri i variacioneve pa përsëritje në rastin e përgjithshëm do të shikojmë në këtë shembull.

► **Shembulli 2.** Ta caktojmë **numrin** e variacioneve pa përsëritje të klasës 1, 2, 3, ..., n prej elementeve të bashkësisë $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Zgjidhje. Numri i variacioneve pa përsëritje prej klasës 1-rë prej n elemente e paraqet numrin e mundësive të vendit të parë të vëndohet çfarëdo prej elementeve 1, 2, 3, ..., n. Ato qartazi janë n në numër, prandaj: $V_n^1 = n$.

Numri i variacioneve pa përsëritje prej klasës 2-të prej n elemente e paraqet numrin e mundësive në të njëjtin moment në vendin e parë të vëndohet ndonjëri prej elementeve 1, 2, 3, ..., n, kurse në vendin e dytë ndonjëri prej të tjerëve n-1 elemente prej bashkësisë së dhënë. Domethënë, ai numër do të jetë: $V_n^2 = n(n-1)$.

Numri i variacioneve pa përsëritje prej klasës 3-të prej n elemente e paraqet numrin e mundësive të vendit të parë të vëndohet ndonjëri prej elementeve 1, 2, 3, ..., n, kurse në vendin e dytë ndonjëri prej elementeve tjerë n-1 elemente nga bashkësia e dhënë, kurse në vendin e tretë ndonjëri prej të tjerëve n-2 elemente të bashkësisë së dhënë. Domethënë, ai numër do të jetë: $V_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

Formimi i variacioneve pa përsëritje vazhdon deri sa nuk mbarojnë të gjitha elementet, prandaj numri i përgjithshëm i të gjitha variacioneve të mundshme pa përsëritje prej klasës k prej n elemente është:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \text{ ku } k \leq n \quad (1)$$

► **Shembulli 3.** Në paralelen me 30 nxënës duhet të zgjedhet udhëheqësia e klasës, e cila përbëhet prej kryetarit, sekretarit dhe arkatarit. Në sa mënyra mund të bëjmë zgjedhjen?

Zgjidhje. Këtu bëhet fjalë për grupe prej tre nxënësve, ku e rëndësishme është radhitja (nuk është një lloj cili do të jetë kryetar, cili sekretar, kurse cili arkatar). Domethënë kemi variacione, e qartë pa përsëritje prej klasës 3-të prej 30 elemente. Zgjedhja e udhëheqësisë mund të kryhet në 24360 mënyra, A të besohet? Pra, të provojmë me formulë (1):

$$V_{30}^3 = n(n-1)(n-2) = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360. \blacksquare$$

► **Shembulli 4.** Sa numra të ndryshëm pesëshifrorë mund të formohen prej 8 shifrave të para?

Zgjidhje. Këtu $n=8$, $k=5$; prandaj prej (1) do të kemi $V_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ numra.

Por, variacionet që fillojnë me 0 patjetër duhet të largohen (pse?). Domethënë patjetër duhet t'i zbrisim numrat që fillojnë me 0, kurse të atillë ka: $V_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Prandaj numri i përgjithshëm i numrave pesëshifrorë do të jetë: $V_8^5 - V_7^4 = 6720 - 840 = 5880. \blacksquare$

► **Shembulli 5.** Nëse prej Shkupi deri në Ohër qarkullojnë 12 autobusë në ditë, në sa mënyra mund të udhëtojmë deri atje dhe prapa, nëse udhëtohet:

- deri atje dhe prapa me autobusin e njëjtë,
- deri atje me një autobus, kurse prapa me tjetër?

Zgjidhje. a) Në $V_{12}^1 = 12$ mënyra, b) Në $V_{12}^2 = 12 \cdot 11 = 132$ mënyra. ■

► **Shembulli 6.** Në sa mënyra mund të radhisim 8 libra të ndryshme në një raft, nëse duam:

- tri prej librave gjithmonë të jenë njëri pranë tjetrit;
- tri prej librave asnjëherë të mos jenë njëri pranë tjetrit?

Zgjidhje.

a) Pasi 3 prej librave duam gjithmonë të jenë njëri pranë tjetrit, ato do t'i llogarisim si një element në lidhje me të tjerët, pra gjithsej kemi 6 elemente. Këto 6 elemente mund t'i radhisim në V_6^6 mënyra, por edhe të tri librat që shkojnë komplet mund ndërmjet veti të radhiten në mënyra të ndryshme, dhe atë në V_3^3 mënyra. Domethënë tri prej tetë librave gjithmonë do të radhiten njëri pranë tjetrit në $V_6^6 \cdot V_3^3 = 4320$ mënyra.

b) Tetë libra, pa kufizim, mund të radhiten në $V_8^8 = 40320$ mënyra, por atëherë do të ndodh edhe ao tri libra të jenë njëri pranë tjetrit, që kundërshton kushtin e detyrës. Prandaj, është e nevojshme prej numrit të të gjitha radhitjeve të librave (40320) ta zbrisim numrin e variacioneve 4320 kur të tre librat janë së bashku. Përgjigja e kërkesës së dytë në detyrë atëherë është $V_8^8 - V_6^6 \cdot V_3^3 = 36000. \blacksquare$

2. Variacionet me përsëritje

Variacionet te të cilat një ose më shumë elemente përsëriten shumë herë quhen variacione me përsëritje. Numri i variacioneve me përsëritje prej n elemente të klasës k shënohet me $\overline{V}_n^k$.

Formimin e numrit të variacioneve me përsëritje, ngjashëm sikurse te variacionet pa përsëritje, do ta shqyrtojmë në shembuj.

➤ **Shembulli 1.** T'i **formojmë** të gjitha variacionet me përsëritje prej elementeve të bashkësisë $M = \{1, 2, 3\}$ dhe ta vërejmë numrin e tyre.

Zgjidhje. Variacionet me përsëritje prej klasës së parë janë vet elementet e bashkësisë M :

1, 2, 3.

Gjithsej janë 3.

Variacionet me përsëritje prej klasës së dytë fitohen ashtu që në anën e djathtë prej variacioneve me përsëritje prej klasës së parë përkruhet çdonjëri prej elementeve të bashkësisë M , ku fitojmë:

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Gjithsej ka $3 \cdot 3 = 9$.

Variacionet me përsëritje prej klasës tretë fitohen ashtu që në anën e djathtë prej variacioneve me përsëritje prej klasës së dytë përkruhet çdonjëri prej elementeve të bashkësisë M , ku fitojmë:

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133;

211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233;

311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.

Gjithsej ka $9 \cdot 3 = 27$.

Si njehsohet numri i variacioneve me përsëritje në rastin e përgjithshëm do të shikojmë prej shembullit që vijon.

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojmë **numrin** e variacioneve me përsëritje prej klasës së parë, dytë, tretë, etj. klasës k -të të bashkësisë $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Zgjidhje.

Numri i variacioneve me përsëritje prej klasës së parë është i barabartë me numrin e elementeve të bashkësisë M , domethënë: $\overline{V}_n^1 = n$.

Numri i variacioneve me përsëritje prej klasës së dytë fitohen kur çdo variacioni me përsëritje prej klasës së parë, ato janë n në numër, do të shoqërohet çdonjëri prej elementeve të bashkësisë M të cilët janë gjithashtu n në numër, prandaj: $\overline{V}_n^2 = n \cdot n = n^2$.

Numri i variacioneve me përsëritje prej klasës së tretë fitohet kur çdo variacioni me përsëritje prej klasës së dytë, ato janë n^2 në numër, do t'i shoqërohet çdonjëri prej elementeve të bashkësisë M të cilët janë n në numër, prandaj: $\overline{V}_n^3 = n^2 \cdot n = n^3$.

Në mënyrë të ngjashme fitohet numri i variacioneve me përsëritje prej klasës katërt, pestë, ... , klasës k , pra numri i variacioneve me përsëritje prej klasës k do të jetë:

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

➤ **Shembulli 3.** Sa „fjalë” të Morzeut mund të formohen prej shenjave themelore „.” dhe „-”, nëse dihet se një „fjalë” përbëhet më së shumti prej katër shenjave themelore?

Zgjidhje. Këtu bëhet fjalë për variacione me përsëritje dhe po ashtu kemi „fjalë” me gjatësi një, dy, tre ose katër shenja themelore, prandaj numri i përgjithshëm i „fjalëve” është:

$$\overline{V}_2^1 + \overline{V}_2^2 + \overline{V}_2^3 + \overline{V}_2^4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Sa elemente ka bashkësia nëse numri i variacioneve me përsëritje prej klasës 4-të është 83521?

Zgjidhje. Kemi: $\overline{V}_n^4 = 83521$, pra $n^4 = 83521$, prej ku $n = \sqrt[4]{83521} = \sqrt{289} = 17. \blacksquare$

➤ **Shembulli 5.** Sa elemente ka bashkësia për të cilën vlen: $V_{2n+1}^3 : \overline{V}_{2n-1}^3 = 210 : 169$?

Zgjidhje. Prej kushtit të detyrës kemi $(2n+1)2n(2n-1) : (2n-1)^3 = 210 : 169$, prej ku fitojmë barazimin: $82n^2 - 589n + 105 = 0$, zgjidhja e të cilit është $n_1 = 7$, zgjidhja e dytë nuk merret parasysh pasi është numër negativ. $\blacksquare$

DETYRA

- Prej elementeve të bashkësisë $M = \{a, b, c, d\}$ formoji të gjitha variacionet pa përsëritje të klasës së parë, dytë dhe të tretë.
- Sa sinjale të ndryshme mund të bëjsh prej 6 dritave me ngjyra të ndryshme, grupoji nga 3?
- Sa numra dyshifrorë mund të shkruash prej shifrave 0, 1, 3 dhe 5 nëse te numri nuk përsëritet asnjë shifër?
- Sa numra pesëshifrorë mund të shkruash prej shifrave 0, 1, 3, 5, 7 dhe 9, ashtu që zeroja nuk është as në vendin e parë as në vendin e fundit dhe asnjë shifër nuk përsëritet?
- Ndërmjet dy qyteteve ka 13 stacione. Sa bileta të ndryshme për udhëtim mund të jepen?
- Ke të drejtë të zgjedhish 6 gjuhë të huaja prej 5 disiplinave shkencore. Në sa mënyra mund të zgjedhish dy gjuhë dhe dy disiplina shkencore?
- Njehso n nëse $52 \cdot V_n^3 = 3 \cdot V_{n+2}^4$?
- Numri i variacioneve me përsëritje prej klasës k prej 5 elemente është 15625. Sa është k ?
- Sa variacione me përsëritje prej klasës 4 mund të formosh prej elementeve të bashkësisë $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: a) të cilët e përmbajnë njëshin dhe ajo mund të përsëritet; b) nëse njëshi paraqitet vetëm një herë?
- Në sa mënyra të ndryshme mund të plotësosh fletë për prognozë sportive, nëse dihet se ajo përmban 13 ekipe futbolli rezultati i të cilëve është prej tipit 0 (për baraz), 1 (për fitimin e nikoqirëve) dhe 2 (për fitimin e mysafirëve)?

3.1.3. PERMUTACIONET

Çdo radhitje (grupim) e numrit të dhënë të elementeve prej një bashkësie në grupe, ku në çdo grup janë të gjithë elementet e dhëna, por gjithmonë në radhitje tjetër, quhet *permutim*. Grupet që përbëhen prej të gjitha elementeve të bashkësisë së dhënë, kurse ndryshojnë njëri prej tjetrit sipas radhitjes së ndryshme të elementeve, quhen *permutacione*. Varësisht prej asaj se elementet në permutacion a përsëriten ose jo, dallojmë permutacione me dhe pa përsëritje.

1. Permutacionet pa përsëritje

Çdo radhitje që mund të formohet prej n elementeve të bashkësisë së dhënë, ashtu që në të paraqiten të gjitha ato elementet vetëm nga një herë, kurse njëri prej tjetrit të radhëve dallohen vetëm sipas radhitjes së ndryshme të elementeve, quhet **permutacion pa përsëritje**. Kjo do të thotë se permutacionet pa përsëritje janë në realitet variacione pa përsëritje prej klasës n të bashkësisë me n elemente, pra mund ta përkufizojmë në këtë mënyrë:

Përkufizim. Permutacionet pa përsëritje prej n elemente të bashkësisë $M = \{1, 2, \dots, n\}$, janë n nënbashkësi të elementeve të ndryshme të bashkësisë M .

Numri i permutacioneve pa përsëritje prej n elemente të ndryshme të bashkësisë së dhënë shënohet me P_n .

Formimi i permutacioneve pa përsëritje, si edhe caktimin i numrit të tyre do ta tregojmë në shembuj.

► **Shembulli 1.** T'i formojmë permutacionet pa përsëritje prej elementeve të bashkësisë:

a) $\{a, b\}$; b) $\{a, b, c\}$; c) $\{a, b, c, d\}$; dhe ta vërejmë numrin e tyre.

Zgjidhje. Permutacionet pa përsëritje prej bashkësive të dhëna janë:

a) ab, ba .

Gjithsej ka 2.

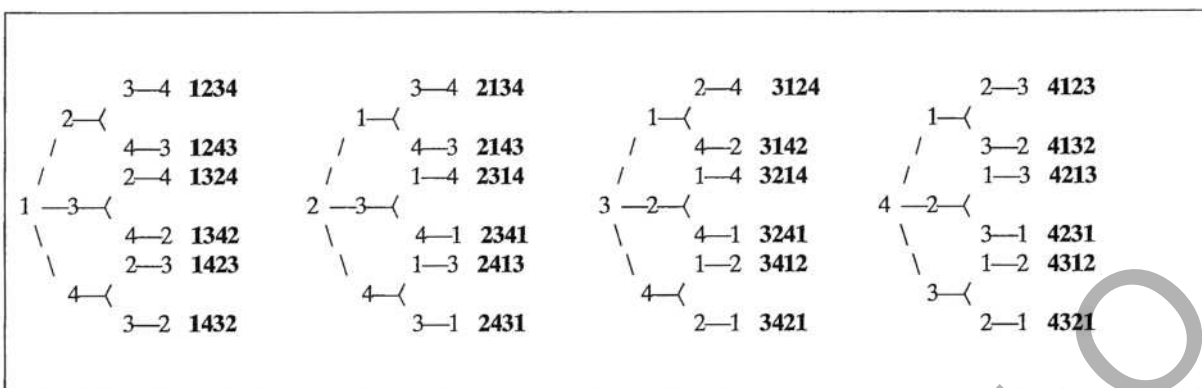
b) $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Gjithsej ka $3 \cdot 2 = 6$.

a) $abcd,$	$abdc,$	$acbd,$	$acdb,$	$adbc,$	$adcb,$
$baed,$	$badc,$	$bcad,$	$bcda,$	$bdac,$	$bdca,$
$cabd,$	$cadb,$	$cbad,$	$cbda,$	$cdab,$	$cdba,$
$dabc,$	$dacb,$	$dbac,$	$dbca,$	$dcab,$	$dcba,$

Gjithsej ka $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. ■

Në diagramin degëzor do ta ilustrojmë mënyrën e formimit të permutacioneve pa përsëritje prej elementeve të bashkësisë $M = \{1, 2, 3, 4\}$.



Për paraqitjen e mënyrës së njehsimit të numrit të permutacioneve, do ta shfrytëzojmë përsëri shembullin 1.

Në bashkësinë me një element është i mundshëm vetëm një permutacion pa përsëritje, prandaj: $P_1=1$.

Në bashkësinë me dy elemente, në shembullin 1a) gjatë formimit të permutacioneve pa përsëritje shikuar se të mundshme janë vetëm dy, d.m.th.: $P_2=2 \cdot P_1=2 \cdot 1$.

Në bashkësinë me tre elemente, në shembullin 1b) gjatë formimit të permutacioneve pa përsëritje shikuar se, është i mundshëm të vendosen në tre grupe, prej të cilave njëra fillon me a , e dyta me b dhe dy elementet tjerë me c . Në çdo grup është i mundshëm aq numër i permutacioneve sa herë mund të permutohen dy elementet tjera, domethënë në tre grupe me nga dy permutacione, prandaj $P_3=3 \cdot P_2=3 \cdot 2 \cdot 1=6$.

Në bashkësinë me katër elemente, në shembullin 1c) gjatë formimit të permutacioneve pa përsëritje shikuar se është i mundshëm të vendosen në katër grupe, prej të cilëve njëri fillon me a , i dyti me b , i treti me c dhe i katërti me d . Në çdo grup është i mundshëm aq numër i permutacioneve sa herë mund të permutohen tre elementet tjerë, domethënë në katër grupe nga gjashtë permutacione, prandaj $P_4=4 \cdot P_3=4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24$.

Në mënyrë të ngjashme caktohet numri i permutacioneve pa përsëritje prej bashkësisë me 5 elemente dhe ai do të jetë: $P_5=5 \cdot P_4=5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=120$ permutacione.

Prej bashkësisë me $n-1$ elemente $P_{n-1}=(n-1) \cdot P_{n-2}$.

Dhe në fund prej bashkësisë me n elemente numri i permutacioneve pa përsëritje do të jetë $P_n=n \cdot P_{n-1}$, kurse prej këtu vijon se:

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ky prodhim prej n numrave natyrorë të njëpasnjëshëm simbolikisht shënohet me $n!$ (lexohet n faktoriel). Domethënë $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n = n!$, d.m.th. $P_n = n!$.

Sipas përkufizimit merret se $0! = 1$.

Të vërejmë se vlen: $P_n = V_n^n$, provo pse?

➤ **Shembulli 2.** Janë dhënë elementet e bashkësisë $\{1,2,3,4,5,6\}$; në sa permutacione elementet 3,4,5 janë njëri pranë tjetrit, dhe atë:

a) në këtë radhitje, b) në çfarëdo radhitje?

Zgjidhje.

a) Pasi elementet 3,4,5 kërkohet të jenë në këtë radhitje, ato mund t'i llogarisim për një element dhe së bashku me tre elementet tjerë mund të permutohen, d.m.th. të radhiten në $4!$ mënyra, domethënë kemi 24 permutacione.

b) Në këtë rast radhitja e elementeve 3,4,5 në grup është çfarëdo. Këto tre elemente mund të radhiten në $3!$ mënyra. Por, në cilindo prej këtyre rasteve ato mund t'i llogarisim përsëri për një element pa marrë parasysh radhitjen e tyre, dhe përsëri kemi 4 elemente, prandaj numri i permutacioneve këtu është $P = 3! \cdot 4! = 144$. ■

➤ **Shembulli 3.** Në sa mënyra 8 persona mund të ulen njëri pranë tjetrit në 8 karrigia, nëse karriket janë në një rresht?

Zgjidhje. Të gjithë personat duhet të vendosen në karriget dhe atë në çfarëdo radhitje të mundshme, domethënë bëhet fjalë për permutacione, qartë pa përsëritje. Ajo mund të bëhet në $P_8 = 8! = 40320$ mënyra. ■

➤ **Shembulli 4.** Në sa mënyra mund të radhiten 5 djem dhe 4 vajza në rresht prej 9 karrigeve nëse në mënyrë alternative ulen djali afër vajzës?

Zgjidhje. Pesë djem mund të radhiten në $5!$ mënyra, kurse katër vajza në $4!$ mënyra. Numri i radhitjeve të mundshme në të cilat djemët në mënyrë alternative ulen afër vajzave është prodhimi i tyre, d.m.th. $P = 5! \cdot 4! = 2880$. ■

➤ **Shembulli 5.** Numri i permutacioneve pa përsëritje prej $n-2$ elemente është 90 herë më i vogël se numri i permutacioneve pa përsëritje prej n elemente. Sa është n ?

Zgjidhje. Prej kushtit të detyrës kemi $P_n = 90 \cdot P_{n-2}$, përkatësisht:

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 90 (n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

pas pjesëtimit $(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, do të fitojmë $n(n-1) = 90$, përkatësisht $n^2 - n - 90 = 0$. Zgjidhjet e këtij barazimi katror janë $n_1 = 10$, $n_2 = -9$. Zgjidhja e dytë nuk merret parasysh, prandaj përgjigja është $n = 10$. ■

2. Permutacionet me përsëritje

Deri më tani shqyrtuam permutacione në të cilat të gjitha elementet ishin të ndryshme, megjithatë mund të ndodh ndërmjet elementeve të bashkësisë së dhënë të kemi një numër i elementeve të njëjtë dhe duhet t'i permutojmë. Poashtu, le të kemi bashkësi prej n elemente, ndërmjet të cilëve k_1 të barabartë të një lloji, k_2 të barabartë të llojit tjetër, k_3 elemente të barabartë prej llojit të tretë, ..., k_r të barabartë prej llojit r , ku $r < n$ dhe $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r = n$. Çdo radhitje prej të gjitha elementeve të bashkësisë të këtillë të dhënë quhet *permutacion me përsëritje* prej atyre elementeve.

Mënyra për formimin e permutacioneve me përsëritje dhe caktimi i numrit të tyre është i ngjashëm me formimin e permutacioneve pa përsëritje dhe atë do ta parashtrojmë në shembuj.

➤ **Shembulli 1.** T'i **formojmë** të gjitha permutacionet e ndryshme me përsëritje prej elementeve të bashkësisë $\{a, a, b\}$.

Zgjidhje. Së pari elementeve të barabartë përkohësisht u shpërdajmë indeksa që të mund t'i dallojmë, pastaj elementet do t'i permutojmë dhe në fund do t'i fshijmë indeksat dhe do t'i rinumërojmë permutacionet e ndryshme. Kështu do t'i fitojmë permutacionet: $a_1 a_2 b$, $a_1 b a_2$, $a_2 a_1 b$, $a_2 b a_1$, $b a_1 a_2$, $b a_2 a_1$, prej ku duke i fshirë indeksat fitohen permutacionet: **aab**, **aba**, **aab**, **aba**, **baa**, **baa**. Tani hudhim nga një

prej permutacioneve të njëjta dhe i fitojmë permutacionet e ndryshme me përsëritje: *aab, aba, baa*, numri i të cilëve është dy herë më i vogël se numri i permutacioneve pa përsëritje. ■

Nëse permutojmë bashkësi prej n elemente, prej të cilëve k janë të barabartë ($k \leq n$), atëherë si në shembullin paraprak permutacionet me përsëritje i fitojmë me futje të përkohësishme të indeksave të elementet e njëjtë; d.m.th. formimi i permutacioneve pa përsëritje, pastaj i fshijmë indeksat të elementet e njëjtë dhe i huthim permutacionet e barabartë. Në këtë mënyrë i fitojmë permutacionet prej n elemente, prej të cilëve k janë të barabartë dhe **numri** i tyre do të jetë i barabartë me numrin e permutacioneve pa përsëritje prej n elemente të marra sikur të jenë të ndryshëm, d.m.th. $n!$, të pjesëtuar me numrin e permutacioneve prej k elemente, d.m.th. $k!$, pasi aq ka të barabartë. Numrin e tyre e shënojmë me $P_n(k)$ dhe ai do të jetë:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!} \quad (1)$$

Në mënyrë analoge e caktojmë edhe numrin e permutacioneve prej n elemente, ndërmjet të cilëve ka r të ndryshëm ($r \leq n$), prej të cilëve i pari përsëritet k_1 herë, i dyti k_2 herë, i treti k_3 herë, ..., i r -ti k_r herë, ku ai është i barabartë me:

$$P_n(k_1, k_2, k_3, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_r!}, \text{ ku } k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r = n. \quad (2)$$

► **Shembulli 2.** Sa permutacione të ndryshme mund të formohen prej shkronjave të fjalës *MATEMATIKA*?

Zgjidhje. Në fjalën *MATEMATIKA* shkronja M përsëritet dy herë, A tri herë dhe T dy herë, prandaj numri i permutacioneve me përsëritje do të jetë:

$$P_{10}(2,3,2) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200. \blacksquare$$

► **Shembulli 3.** Prej shifrave 1,2,2,2,2,3,3,4,4,4 të formojmë numër dhjetëshifrorë. Sa numra të atillë fillojnë me: a) 22; b) 313; c) 1234?

Zgjidhje. Për çdonjërin prej rasteve ai është numri i permutacioneve me përsëritje prej shifrave tjera:

$$\text{a) } P_8(2,2,3) = \frac{8!}{2!2!3!} = 1680; \quad \text{b) } 35 \text{ (pse?);} \quad \text{c) } 60 \text{ (pse?).} \blacksquare$$

► **Shembulli 4.** Drejtëndëshi *ABCD* me dimensione $7m$ dhe $4m$ është ndarë me vija horizontale dhe vertikale në katror me syprinë prej $1m^2$. Në sa mënyra të ndryshme mund të arrijmë prej kulmit *A* deri te kulmi *C*, nëse është e lejuar vetëm lëvizje djathtas dhe lartë?

Zgjidhje. Çdo lëvizje prej kulmit *A* deri te kulmi *C* përmban 4 rrugë prej nga $1m$ lartë (l) dhe 7 rrugë prej nga $1m$ djathtas (d). Atëherë rruga e zgjedhur do të paraqet permutacion prej 11 elemente (11

m rrugë) me përsëritje. Për shembull rruga e zgjedhur në fig. 1. e paraqet permutacionin $ldldlddddld$. Numri i përgjithshëm i permutacioneve do të jetë:

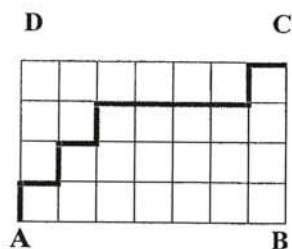


fig.1

$$P_{11}(4,7) = \frac{11!}{4!7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7!} = 330. \blacksquare$$

DETYRA

- Formoji të gjitha permutacionet prej elementeve të bashkësisë $\{a, o, d, r\}$ dhe caktoji ato të cilat paraqesin fjalë në kuptimin e gjuhës shqipe.
- Në sa permutacione elementet 1,2,3,4 prej bashkësisë $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ gjenden njëri afër tjetrit, dhe atë: a) në radhitjen e njëjtë; b) në çfarëdo radhitje?
- Është dhënë bashkësia $\{0,1,2,3,4,5\}$. Cakto numrin e numrave të ndryshëm gjashtëshifrorë të cilët mund t'i formosh prej elementëve të bashkësisë së dhënë, ashtu që shifrat të mos përsëriten?
- Numri i permutacioneve prej n elemente në lidhje me numrin e permutacioneve prej $n+2$ elemente qëndron si $0,1 : 3$. Cakto n ?
- Në një raft ka 2 libra të kaltër, 5 të kuqe dhe 3 të verdha. Në sa mënyra mund t'i radhisish këto libra ashtu që librat me ngjyrë të njëjtë të kopertinës të jenë njëra afër tjetrës?
- Në sa mënyra të ndryshme mundesh prej kutisë të nxjerrish topa 3 të bardhë, 2 të kuq dhe 5 të kaltër?
- Sa është numri i permutacioneve prej shkronjave të fjalës TERMOMETAR?
- Sa ka numra shtatëshifrorë, ku tri shifra janë të barabarta me 1, dy me 2 dhe dy me 3?
- Sa ka numra gjashtëshifrotë, ku tri shifra janë të barabartë me 0, dy me 1 dhe një me 2?
- Cakto numrin e permutacioneve prej elementeve a,a,a,a,a,b,b,b,c të cilët:
 - fillojnë me a ;
 - fillojnë me b ;
 - fillojnë me c .

3.1.4. KOMBINACIONET

Radhitja (grupimi i k elementeve prej një bashkësie prej n elemente ($k \leq n$) në grupe, ku çdo grup ndryshon njëri prej tjetrit sipas elementeve të ndryshme në përbërjen e tyre quhet *kombinim*. Grupet e elementeve, nënbashkësitë prej bashkësisë së dhënë, të cilat ndryshojnë njëra prej tjetrës vetëm sipas elementeve të ndryshme në përbërjen e tyre, por jo edhe sipas radhitjes, quhet *kombinacione*. Domethënë kombinaconet janë nënbashkësi prej variacioneve. Në mënyrë të ngjashme sikurse te variacionet edhe kombinacionet mund të jenë prej klasës 1-rë nëse kanë vetëm një element, prej klasës 2-të nëse kanë dy elemente etj. Gjithashtu, ka kombinacione me dhe pa përsëritje varësisht prej asaj një element i njëjtë në një grup a përsëritet shumë herë ose jo.

1. Kombinacionet pa përsëritje

Përkufizimi. Çdo nënbashkësi prej k elemente të bashkësisë $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ quhet kombinacion pa përsëritje prej klasës k prej n elementeve të dhënë të bashkësisë M .

Nga ky përkufizimi vijon se te kombinacionet është e rëndësishme prania e elementeve, por jo radhitja e tyre. Numri i kombinacioneve pa përsëritje prej n elemente prej klasës k shënohet me C_n^k .

Formimi i kombinacioneve pa përsëritje prej n elementeve prej klasës k , si edhe caktimin e numrit të tyre do ta tregojmë në këtë shembull.

► **Shembulli 1.** T'i formojmë të gjitha kombinacionet pa përsëritje prej klasës 1-rë, 2-të, 3-të dhe 4-të prej elementeve të bashkësisë $\{a, b, c, d\}$ dhe ta caktojmë numrin e tyre.

Zgjidhje. Kombinacionet pa përsëritje prej klasës 1-rë janë vet elementet:

$a \quad b \quad c \quad d$.

Numri i tyre është $C_4^1 = 4$.

Kombinacionet pa përsëritje prej klasës 2-të do t'i fitojmë nëse i formojmë të gjitha variacionet pa përsëritje prej klasës 2-të dhe pastaj i hudhim ato me elemente të barabarta:

$ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bc \quad bd \quad ca \quad cb \quad cd \quad da \quad db \quad dc$.

Kombinacionet pa përsëritje prej klasës 2-të janë: ab, ac, ad, bc, bd, cd . Gjithsej 6.

Si mund ta caktojmë numrin e tyre?

Numri i variacioneve pa përsëritje prej klasës 2-të është $V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Sipas mënyrës të fitimit të kombinacioneve pa përsëritje prej klasës 2-të, shikojmë se këtu përveç çdo kombinacioni paraqiten edhe të gjitha permutacionet e saj, kurse ai numër është $P_2 = 2!$. Domethënë: $V_4^2 = C_4^2 \cdot P_2$, prej ku: $S_4^2 = \frac{V_4^2}{P_2}$,

prandaj kombinacione pa përsëritje prej klasës 2-të ka: $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Kombinacione pa përsëritje prej klasës 3-të do të fitojmë nëse i formojmë të gjitha variacionet pa përsëritje prej klasës 3-të dhe pastaj i hudhim ato me elemente të barabarta:

$abc \quad abd \quad acb \quad acd \quad adb \quad adc \quad bac \quad bad \quad bca \quad bcd \quad bda \quad bdc$
 $cab \quad cad \quad cba \quad cbd \quad cda \quad cdb \quad dab \quad dac \quad dba \quad dbc \quad dca \quad dcb$.

Kombinacionet pa përsëritje prej klasës 3-të janë: abc, abd, acd, bcd . Gjithsej 4.

Numrin e kombinacioneve pa përsëritje prej klasës 3-të do ta caktojmë sikurse më lartë. Përkatesisht, numri i variacioneve pa përsëritje prej klasës 3-të është: $V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Sipas mënyrës së fitimit të kombinacioneve paraqiten të gjitha permutacionet e tij, kurse ai numër është $P_3 = 3!$.

Domethënë: $V_4^3 = C_4^3 \cdot P_3$, prej ku: $C_4^3 = \frac{V_4^3}{P_3}$, prandaj kombinacione pa përsëritje prej klasës 3-të ka:

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4.$$

Kombinacionet pa përsëritje prej klasës 4-të është vetëm një dhe ai: **abcd**, domethënë: $C_4^1=1$. ■

Në mënyrë të ngjashme formohen dhe arrihet deri te numri i kombinacioneve pa përsëritje prej n elemente prej klasë k , d.m.th. në rastin e përgjithshëm $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_n}$, përkatësisht:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Me zgjerimin e thyesës me $(n-k)!$ arrihet edhe deri te kjo formulë për njehsimin e kombinacioneve pa përsëritje prej n elemente prej klasës k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

► **Shembulli 2.** Nëse një paralele ka 10 lëndë dhe 5 orë të ndryshme në ditë, në sa mënyra mund t'i shpërdajmë orët për një ditë?

Zgjidhje. Pasi në detyrë nuk kërkohet radhitja e orëve në një ditë, por vetëm numri i mënyrave për shpërdarjen e lëndëve të ndryshme në një ditë, do të kemi kombinacione pa përsëritje dhe atë mund ta bëjmë në:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 252 \text{ mënyra.} \blacksquare$$

► **Shembulli 3.** Prej 12 pyetjeve të provimit nxënësi duhet të zgjedh 5. Në sa mënyra mund ta bënë zgjedhjen?

Zgjidhje. Këtu bëhet fjalë për zgjedhjen ku nuk është e rëndësishme radhitja, prandaj ky kombinacion, kuptohet pa përsëritje, prej 12 elemente dhe atë të klasës 5-të. Domethënë zgjedhjen mund ta bëjmë në:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792 \text{ mënyra.} \blacksquare$$

► **Shembulli 4.** Në garën e shahut marrin pjesë 14 shahistë. Çdonjëri prej tyre me të tjerët ka luajtur nga dy parti. Sa parti janë luajtur?

Zgjidhje. Kur çdonjëri prej 14-të shahistëve luan me çdonjërin prej të tjerëve do të luan nga një parti do të ketë C_{14}^2 parti, por pasi çdonjëri prej tyre luan nga dy parti do të luhen:

$$2C_{14}^2 = 2 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 182 \text{ parti.} \blacksquare$$

► **Shembulli 5.** Prej 10 letrave të lotos së shpejtë saktë 3 me siguri sjellin fitim. Nëse blejmë 6 letra sa mundësi të ndryshme ekzistojnë për të pasur të paktën një fitim?

Zgjidhje. Prej 10 letrave 3 mund t'i zgjedhim në C_{10}^3 mënyra. Prej 10 letrave 7 nuk kanë fitim. Treshin i cili nuk fiton mund ta zgjedhim në C_7^3 mënyra. Domethënë kemi me siguri fitim në njërën prej:

$$C_{10}^3 - C_7^3 = 85 \text{ kombinacioneve. Provo!} \blacksquare$$

2. Kombinacionet me përsëritje

Le të jetë dhënë bashkësia $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ prej n elemente. Nëse gjatë formimit të kombinacioneve prej klasës k prej n elemente ekziston mundësi çdo element në çdo kombinacion të paraqitet 1, 2, 3, ..., ose k herë, atëherë kombinacionet e atilla quhen kombinacione me përsëritje. Klasa k mund të jetë më e vogël, e barabartë ose më e madhe se numri i elementeve n .

Numrin e kombinacioneve me përsëritje prej n elemente prej klasës k e shënojmë me $\overline{C}_n^k$.

Mënyra për fitimin e kombinacioneve me përsëritje prej n elemente prej klasës k mund ta tregojmë në këtë shembull.

► **Shembulli 1.** T'i formojmë kombinacionet me përsëritje prej klasës 2-të dhe 3-të prej elementeve të bashkësisë $\{1, 2, 3, 4\}$.

Zgjidhje. Kombinacionet me përsëritje prej klasës 2-të nga bashkësia e dhënë janë:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44.

Ndërsa kombinacionet me përsëritje prej klasës 3-të nga bashkësia e dhënë janë:

111 112 113 114 122 123 124 133 134 144
222 223 224 233 234 244
333 334 344
444. ■

Numri i kombinacioneve me përsëritje prej n elemente prej klasës k njehsohet sipas formulës:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \text{ këtu mund } k > n$$

Provo numrin e kombinacioneve me përsëritje në shembullin 1!

► **Shembulli 2.** Është dhënë bashkësia $A = \{a_1, a_2\}$. Ta caktojmë numrin e kombinacioneve me përsëritje prej klasës 2-të dhe 3-të dhe t'i formojmë ato.

Zgjidhje.

Numri i kombinacioneve me përsëritje prej klasës 2-të është $\overline{C}_2^2 = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3$
dhe atë kombinacionet janë: $a_1 a_1$ $a_1 a_2$ $a_2 a_2$.

Numri i kombinacioneve me përsëritje prej klasës 3-të është $\overline{C}_2^3 = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$
dhe atë kombinacionet janë: $a_1 a_1 a_1$ $a_1 a_1 a_2$ $a_1 a_2 a_2$ $a_2 a_2 a_2$. ■

► **Shembulli 3.** Sa trekëndësha mund të formojmë nëse brinjët e trekëndëshit e kanë për gjatësi njërin prej vlerave: 4, 5, 6, 7?

Zgjidhje. Këtu bëhet fjalë për kombinacionet prej klasës 3-të, pasi njëlloj është cila brinjë cilën gjatësi do ta ketë, pasi mundet dy ose tri brinjë të kenë gjatësi të njëjtë do të kemi kombinacione me përsëritje dhe atë:

$$\overline{C}_4^3 = \frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 3!} = 20 \text{ trekëndësha. } \blacksquare$$

► **Shembulli 4.** Sa elemente janë të nevojshme për të formuar 190 kombinacione me përsëritje prej klasës 2-të?

Zgjidhje. Pasi $\overline{C}_n^2 = 190$, kemi: $\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = 190$, përkatësisht $\frac{(n+1)n}{2} = 190$, prej ku e fitojmë

barazimin katror $n^2 + n - 380 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë 19 dhe -20. Përgjigja është 19, pse! ■

► **Shembulli 5.** Ta njehsojmë nëse $C_{n+2}^3 : \overline{C}_{n-2}^3 = 15 : 7$.

Zgjidhje. Prej kushtit të detyrës kemi:

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2 \cdot 1} : \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 : 7, \text{ kurse prej këtu e fitojmë barazimin katror:}$$

$4n^2 - 33n + 8 = 0$, ku vetëm një zgjidhje $n=8$ i kënaq kushtet e detyrës. ■

► **Shembulli 6.** Autobusi me 12 udhëtarë ndalet në katër stacione. Në sa mënyra mund të dalin udhëtarët në stacione, varësisht vetëm prej numrit të udhëtarëve të cilët dalin në stacione të veçanta?

Zgjidhje. Me numrin n ($n = 1, 2, 3, 4$) le ta shënojmë çdo dalje të udhëtarëve në stacionin n . Po ashtu fitohen grupe prej nga 12 elemente. Për shembull, grupi i elementeve 11122333344 do të thotë se në stacionin e parë kanë dal 3 udhëtarë, në të dytin 2, në të tretin 5 dhe në të katërtin 2 udhëtarë. Pasi elementet në grupe mund të përsëriten (në një stacion mund të dalin më shumë udhëtarë), kurse radhitja e asaj se cili udhëtar del nuk është e rëndësishme, kemi kombinacione me përsëritje prej 4 elemente prej klasës 12-të. Të atillë ka:

$$\overline{C}_4^{12} = \frac{(4+12-1)!}{12!(4-1)!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!3 \cdot 2} = 455.$$

Përgjigje e detyrës është se dymbëdhjetë udhëtarë, varësisht vetëm prej numrit të tyre, në katër stacionet mund të dalin në 455 mënyra. ■

DETYRA

- Prej elementeve të bashkësisë $M = \{1, 2, 3, 4\}$ formoju të gjitha kombinacionet pa përsëritje të klasës së parë, dytë, tretë dhe të katërtë.
- Shitorja e re e hapur në konkurs kërkon 5 shitës. Në të njëjtin janë paraqitur më shumë persona. Vetëm 9 persona i plotësojnë kushtet e zgjedhjes. Në sa mënyra mund të kryhet zgjedhja përfundimtare?
- Cakto numrin e diagonaleve të dymbëdhjetëkëndëshit të rregulltë?
- Në një gar shahu janë luajtur 210 parti. Cakto numrin e pjesëmarrësve nëse dihet se çdo pjesëmarrës ka luajtur nga një parti me çdonjërin prej të tjerëve.
- Në rrafsh janë dhënë 10 pika të ndryshme prej të cilave asnjë treshe nuk është kolineare. Cakto numrin e të gjitha drejtëzave të cilat janë përcaktuar me pikat e dhëna?
- Në bashkësinë prej 8 pikave ekzistojnë saktë 5 treshe të pikave kolineare. Sa drejtëza të ndryshme mund të caktohet prej pikave të dhëna?
- Në paralele ka 16 vajza dhe 20 djem. Për udhëheqësinë e bashkësisë së klasës është e nevojshme të zgjedhen 4 nxënës prej të cilëve të paktën një vajzë. Në sa mënyra mund të bëhet zgjedhja?
- Në lojën e Lotos prej 39 topave me numra të ndryshëm janë nxjerrë 7 dhe një plotësues. Sa fletë të zakonshme duhet të mbushish nëse dëshiron të kesh shtatëshe të sigurtë?
- Në lulishte ka 8 lloje të luleve. Në sa mënyra mund të bëjsh zgjedhjen nëse në buqet dëshiron të kesh 5 lule?
- Numri i kombinacioneve me përsëritje prej klasës 2-të është më i madh për 15 se numri i elementeve. Sa elemente ka?

3.1.5. FORMULA E BINOMIT

Formula e binomit është formula e përgjithshme me ndihmën e së cilës njehsohet shprehja $(a+b)^n$, ku $a, b \in \mathbf{R}$ dhe $n \in \mathbf{N}$. Disa raste speciale të formulës së binomit i kemi të njohura. Për shembull, nëse e fuqizojmë binomin $(a+b)$ sipas rradhës me numrat: 0,1,2,3,4,5,... fitojmë:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Gjatë fuqizimit të binomit $(a+b)$ në çdo rresht mund t'i vërejmë këto veti:

- 1) binomi $(a+b)$ i fuqizuar me numër natyror n ka $n+1$ anëtarë,
- 2) te çdo anëtar i zbërthimit, shuma e treguesëve të fuqisë të shumëzuesit të parë dhe të dytë është n ,
- 3) treguesi të shumëzuesit i parë zvogëlohet prej n deri në 0, kurse te i dyti rritet prej 0 deri në n ,
- 4) koeficientët e fuqive të binomit $(a+b)$ mund të njehsohen me ndihmën e kësaj skeme:

				1								
					1			1				
						1			2		1	
				1			3			3		1
			1		4			6			4	
		1		5		10			10		5	
	1		5		10		10		5		1	
1		5		10		10		5		1		1

Kjo skemë njihet me emrin trekëndëshi i Paskalit, për nder të matematikanit Blez Paskal (1623-1662) i cili i ka studiuar vetitë e atij trekëndëshi për nevojat e studimeve të tija në fushën e teorisë së gjasës. Për ndryshe ky trekëndësh u ka qenë i njohur edhe kinezëve shumë shekuj para asaj, për çka ekzistojnë dokumente të shkruara.

Mund t'i vërejmë këto veti të trekëndëshit të Paskalit:

- a) koeficientët në çdo rresht janë simetrikisht të radhitur,
- b) çdo rresht fillon dhe mbaron me 1,
- c) shuma e çfarëdo dy koeficientëve të njëpasnjëshëm e japin koeficientin që gjendet në rreshtin që vijon në mesin ndërmjet koeficientëve të zgjedhur.

Me ndihmën e trekëndëshit të Paskalit mund t'i caktojmë koeficientët e fuqisë $(a+b)^n$, për çfarëdo numër natyror n , vetëm nëse dihen koeficientët e fuqisë $(a+b)^{n-1}$. Por, nëse n është numër shumë i madh, duke e shfrytëzuar këtë skemë vështirësohen njehsimet. Prandaj, në praktikë shfrytëzohet mënyrë më e thjeshtë për njehsimin e koeficientëve të binomit $(a+b)^n$. Për këtë qëllim, t'i shqyrtojmë kombinacionet pa

përsëritje prej n elemente prej klasës k . Për numrat $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ është future shënimi $\binom{n}{k}$ (lexojmë n mbi k), ku $0 \leq k \leq n$, d.m.th. $C_n^k = \binom{n}{k}$. Domethënë,

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= 1, \\ \binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n, \\ \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}, \\ \binom{n}{3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3 \cdot 2(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{n}{n-2} &= \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}, \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!1!} = n, \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.\end{aligned}$$

Për deri sa i njehsojmë numrat $\binom{n}{k}$ për vlerat përkatëse të n dhe k , do të vërejmë se ato janë pikërisht koeficientët prej fuqive të binomit $(a+b)$ të paraqitur edhe te trekëndëshi i Paskalit. Për shembull, për $n=5$ kemi:

$$\binom{5}{0}=1, \quad \binom{5}{1}=5, \quad \binom{5}{2}=\frac{5 \cdot 4}{2}=10, \quad \binom{5}{3}=\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}=10, \quad \binom{5}{4}=5, \quad \binom{5}{5}=1.$$

Prandaj për binomin $(a+b)^5$ mund të shkruajmë:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Vërejmë se formula e përgjithshme për fuqinë e binomit $(a+b)^n$, $n \in \mathbf{N}$, mund të shkruhet në formë të:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Saktësinë e kësaj formule do ta vërtetojmë me metodën e induksionit matematikor.

Vërtetim:

1⁰. Për $n=1$ formula është e saktë pasi:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b$$

2⁰. Supozojmë saktësi për $n = k$:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \dots + \binom{k}{k}b^k.$$

Ta provojmë saktësinë e formulës për $n = k+1$.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \dots + \binom{k}{k}b^k \right) \cdot (a+b), \text{ prej ku}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \dots + \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] a^{k+1-i} b^i + \dots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}.$$

Kemi $\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$, për $i=2, 3, \dots, k$. Provo! Përveç kësaj vlen edhe :

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1 \text{ dhe } \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1, \text{ prandaj:}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \dots + \binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1},$$

kurse kjo, sipas metodës së induksionit matematikor, domethënë se formula (1) është e saktë për çdo numër natyror. ■

Formula (1) quhet e binomit ose formula e binomit e Njutnit, për nder të matematikanit dhe fizikanit Isak Njutni (1642 - 1727), për të cilin llogaritet se i pari e ka vërtetua dhe sistematikisht e ka zbatuar në kuptimin me të gjerë sesa që këtu është sqaruar.

➤ **Shembulli 1.** Ta shkruajmë në formën e zbërthyer fuqinë $(2a+3b)^5$.

Zgjidhje. Ta zbatojmë formulën e binomit:

$$\begin{aligned} (2a+3b)^5 &= \binom{5}{0}(2a)^5 + \binom{5}{1}(2a)^4(3b) + \binom{5}{2}(2a)^3(3b)^2 + \binom{5}{3}(2a)^2(3b)^3 + \binom{5}{4}(2a)(3b)^4 + \binom{5}{5}(3b)^5 = \\ &= 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5. \blacksquare \end{aligned}$$

➤ **Shembulli 2.** Ta shkruajmë në formën e zbërthyer fuqinë $(1-3y)^4$.

Zgjidhje. Sipas formulës së binomit $a=1$, $b=-3y$, $n=4$, prandaj kemi:

$$(1-3y)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3 \cdot (-3y) + \binom{4}{2}1^2 \cdot (-3y)^2 + \binom{4}{3}1 \cdot (-3y)^3 + \binom{4}{4}(-3y)^4 = 1 - 12y + 54y^2 - 108y^3 + 81y^4. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Me ndihmën e formulës së binomit ta njehsojmë shumën

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Zgjidhje. Nëse në formulën e binomit $(a+b)^n$ vëndojmë: $a=1, b=1$, fitojmë:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Ta caktojmë anëtarin e pestë në zbërthimin e binomit $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{12}$.

Zgjidhje. Anëtarin e pestë ta shënojmë me T_5 . Atë mund ta njehsojmë sipas formulës:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \text{ Në shembullin tonë } n=12, k=4, a=x^{\frac{1}{2}}, b=x^{\frac{2}{3}}, \text{ prandaj:}$$

$$T_5 = \binom{12}{4} (x^{\frac{1}{2}})^{12-4} \cdot (x^{\frac{2}{3}})^4 = 495 (x^{\frac{1}{2}})^8 \cdot x^{\frac{8}{3}} = 495 x^{\frac{20}{3}} = 495 x^6 \sqrt[3]{x^2}. \blacksquare$$

DETYRA

- Njehso shumën: a) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10}$, b) $\binom{10}{0} - \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10}$.
- Shkruaji në formën e zbërthyer fuqitë: a) $(3+2x)^5$, b) $(2x-5)^4$, c) $(x-\frac{1}{x})^6$, ç) $(x+\sqrt{y})^8$.
- Caktoje anëtarin e pestë në zbërthimin e binomit $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^7$.
- Caktoje anëtarin e shtatë në zbërthimin e binomit $(x + \sqrt{2})^{12}$.
- Caktoje anëtarin e mesëm në zbërthimin e binomit $(x-2y)^8$.
- Caktoji dy anëtarët e mesëm në zbërthimin e binomit $(2x+y)^{11}$.
- Caktoje atë anëtar prej zbërthimit të binomit $(x+\sqrt{x})^8$ i cili përmban x^5 .
- Në zbërthimin e binomit $(x^2 + \frac{1}{x})^9$ caktoje atë antar që nuk varet prej x .
- Caktoje numrin e atij anëtarit në zbërthimin e binomit $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b})^{14}$ në të cilin a dhe b kanë treguesë të barabartë.
- Ndryshimi ndërmjet koeficientit të tretë dhe të dytë të binomit në binomin $(a+b)^n$ është 44. Cakto n .

3.2. GJASA

Në jetën e përditshme për çdo ngjarje themi se është me gjasë të madhe, me gjasë ose nuk është me gjasë. Gjithashtu, ekzistojnë shumë momente në jetën kur duhet të sjellish përfundim në bazë të vlerësimit për shansë, d.m.th. gjasa, se ndonjë ngjarje do të ndodh. Pjesa e matematikës që i studion ligjshmëritë për realizimin e këtyre ngjarjeve quhet **teoria e gjasës**. Ajo konstaton rregulla për njehsimin me gjasa si madhësi numerike, d.m.th. hulumton raporte sasiore ndërmjet gjasave për realizimin e atyre ngjarjeve. Teoria e gjasës së pari paraqitet në lidhje me lojërat hazarde që pastaj matematikani Jakob Bernuli (1654-1705) e zbaton gjatë analizës së gabimeve që bëhen gjatë vështrimit. Bazën e saj aksiomatike (viti 1933) e vendos matematikani rus Andrej Kolmogorov (1903-1987).

3.2.1. EKSPERIMENTI. NGJARJA. GJASA STATISTIKE

Të studiuarit e natyrës dhe shoqërisë është rezultat i hulumtimit, vështrimeve - **eksperimentet**, ku realizohen (plotësohen) bashkësitë e caktuara të kushteve, rezultate - **ngjarje**. Nëse eksperimentet realizohen dhe kryhen në laborator, atëherë flasim për *eksperiment të determinuar* (i caktuar, i kufizuar). Nëse eksperimentuesi ka rol pasiv gjatë të vështruarit të ngjarjes e cila realizohet nën ndikimin e shumë faktorëve të njohur dhe të panjohur, atëherë flasim për *eksperiment të padeterminuar*. Për shembull, ngjarje janë: rezultatet prej matjeve të ndryshme të temperaturës së ajrit, temperatura e trupit të njeriut, pesha e tij, paraqitja e *stemës* ose *numrit* të anës së sipërme të monedhës së hedhur, numri i caktuar i *pikave* të anës së sipërme të zarit të hedhur, prodhimi i zgjedhur për kontrollimin e rregulltë gjatë prodhimit të tij, të mos jetë me defekt etj.

Nëse ngjarja fillon gjatë çdo realizimi të ndonjë eksperimenti, atëherë ajo quhet **ngjarje e sigurtë**. Për shembull, nëse në qesen e padukshme gjenden dhjetë topa të bardhë, ngjarja *nxjerrja e topit të bardhë* është ngjarje e sigurtë.

Nëse ngjarja nuk fillon gjatë asnjë eksperimenti të kryer, quhet **ngjarje e pamundshme**. Për shembull, gjatë hedhjes së zarit (me faqe të numëruara prej 1 deri më 6) ngjarja *paraqitja e shtatëshit* është ngjarje e pamundshme.

Nëse ngjarja gjatë kryerjes së ndonjë eksperimenti mund, por nuk është e thënë të fillon, quhet **ngjarje e rastit**. Për shembull, nëse në qesen e padukshme gjenden pesë topa të bardhë dhe tre të zi, ngjarja *nxjerrja e topit të bardhë* është ngjarje rasti.

Pikërisht interesimi i njeriut për parashikimet e ngjarjeve të rastit ka sjellur deri te paraqitja e zhvillimit të gjasës si shkencë. Me interes për jetën e tij janë fillimi i ngjarjeve të ndryshme: numri i vijave të zëna të centralit telefonik, numri i grimcave kozmike të cilat bien në sipërfaqe të caktuar në kohë të caktuar, vetitë e trashëguara të kulturave bimore, në kohën më të re dhe numri i erupcioneve vullkanike të vullkanit të caktuar, numri i intensitetit të tërmeteve në zonën e caktuar. Përvoja tregon se *mundësitë për fillimin e ndonjëit prej këtyre ngjarjeve jo gjithmonë janë të barabarta*, përkatësisht, ato varen prej shumë rrethanave të njohura dhe të panjohura. Kjo do të thotë se nuk ekzistojnë kushte të barabarta ideale për fillimin e ndonjë ngjarje gjatë eksperimentit të caktuar, prandaj paraqitet nevoja për vlerësim të gjasës për fillimin e ndonjë ngjarje pas kryerjes të eksperimenteve në seri.

Për shembull, ta vërejmë lindjen e fëmijëve si dukuri masovike dhe duam ta hulumtojmë ngjarjen A , lindjen e fëmijës me gjini mashkull, në grupin prej nga 1000 foshnjeve. Le të jetë n numri i të gjithë foshnjeve, në rastin tonë $n = 1000$, kurse m është numri i foshnjeve meshkuj. Gjatë hulumtimit të më shumë grupeve prej nga 1000 foshnje, vërehet se herësi $\frac{m}{n}$ sillet përafërsisht rreth numrit konstant 0,511. Ky herës është një lloj treguesi karakteristik për atë sa shpesh ndodh ngjarja A (lindja e fëmijës me gjini mashkull) dhe quhet **dendësia relative (frekuenca)** për ngjarjen A .

Përkufizimi 1. Frekuenca relative e ngjarjes së dhënë A quhet numri $\frac{m}{n}$, ku m është numri i eksperimentit në të cilin ka filluar ngjarja A , kurse n numri i të gjitha eksperimenteve.

Shumë ligjshmëri në biologji, kimi, fizikë dhe shkenca tjera zbulohen me analizën e rezultateve prej numrit të madh të eksperimenteve. Për shembull, në njërin nga eksperimentet e tij botanisti austriak G. J. Mendel (1822-1884) gjatë kryqëzimit të verdh me bizele të verdh ka vërejtur bizele të gjelbër. Dhe atë, prej 34153 kryqëzime, bizele të gjelbër ka fituar në 8506 raste. Domethënë dendësia relative në këtë ngjarje është: $\frac{m}{n} = \frac{8506}{34153} \approx 0,252$. Kështu Mendel ka arritur deri te përfundimi se gjatë numrit mjaft të madh të eksperimenteve, në një të katërtën prej rasteve domethënë, në çdo katër kryqëzime të verdhës me bizele të verdh fitohet bizele e gjelbër. Ky dhe zbulime të tjera të tija kanë ndihmuar ta themelon dhe përpunon teorinë për vetitë trashëguese të bimët dhe më gjerë.

Domethënë, përvoja tregon se nëse ndonjë eksperiment përsëritet në numër të madh të serive dhe për çdo seri caktohet frekuenca relative e ngjarjes A , ato (frekuenca relative) tregojnë tendenca të grupohen (oscillojnë) rreth një numri, të cilin do ta shënojmë me $P(A)$ dhe do ta quajmë **gjasë e statistikës e ngjarjes A** , (P është shkronja e parë e fjalës latine *probabilitas* që do të thotë gjasë).

Përkufizimi 2. Gjasë e statistikës e një ngjarje është numri rreth të cilit oscilon dendësia relative e ngjarjes gjatë numrit të madh të eksperimenteve.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Gjasë e statistikës caktohet (vetëm përafërsisht) pas realizimit të ngjarjes, prandaj quhet *gjasat a posteriore* ose *gjasë empirike*, gjasë e bazuar në përvojën. Për ndryshim të saj, *gjasë a priore* ose *gjasë teorik*, caktohet matematikisht dhe atë prej më parë. Me atë do të njihemi më vonë nëpërmjet përkufizimit klasik për gjasën.

Për gjasën e statistikës, pasi $0 \leq m \leq n$, mund t'i shënojmë këto veti:

- 1^o. Gjasja e **ngjarjes së sigurtë** është e barabartë me 1, pasi $m = n$;
- 2^o. Gjasja e **ngjarjes së pamundshme** është e barabartë me 0, pasi $m = 0$;
- 3^o. Gjasja e **ngjarjes së rastit** A është $0 \leq P(A) \leq 1$.

Ndërmjet shembujve të parë për gjetjen e gjasës të ndonjë ngjarjeje janë përmendur më poshtë.

➤ **Shembulli 1.** Fisniku francez De Mer ka vërejtur se gjatë hudsones të njëkohësishme të tre zareve ai i cili ka vë bastlidhje me 11 fiton më shpesh se ai i cili ka vë bastlidhje në shumën 12. Domethënë në gjuhën bashkëkohore mund të themi statistikisht, pasi bëhet fjalë për lojë hazarde në të cilën ai shpeshherë ka marrë pjesë, por përsëri nuk ka bërë matje precize. Po ashtu, ai duke menduar ka arritur deri te përfundimi se edhe njëri numër edhe tjetri fitohen në 6 mënyra të ndryshme, por nuk ka mund ta zgjidhë dilemën, prandaj i është drejtuar mikut të tij, matematikanit Blez Paskal (1623-1662). Ngjarja ka ndodhur në vitin 1654, e cila llogaritet për vit të fillimit të zhvillimit të teorisë së gjasës.

Blez Paskali ka treguar se të menduarit e De Merit është i saktë, por jotërësisht. Ka ngelur e vërejtur zgjidhja e tij për këtë problem. Zgjidhja do të jepet kur do t'i mësojmë bazat e konceptit gjasë.

➤ **Shembulli 2.** Matematikani J. Kerih, në robëri në kohën e luftës së dytë botërore, ka bërë 10 seri prej nga 1000 hudsonje të monedhës dhe i ka fituar këto paraqitje të stemës dhe numrit: 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 509 herë.

Pasi në këtë rast $n = 1000$, frekuencat relative përkatëse për fillimin e ngjarjes, paraqitja e stemës, janë:

0,502; 0,511 0,497; 0,529; 0,504; 0,476; 0,507; 0,528; 0,504; 0,509.

Domethënë, frekuencat relative janë grupuar rreth numrit 0,5 që paraqet gjasë statistike për fillimin e ngjarjes paraqitja e stemës gjatë eksperimentit hudsonje e monedhës në lartësi.

➤ **Shembulli 3.** Eksperimenti hudsonje e zarit. Ngjarja e rastit A_i është në anën e sipërme të zarit të paraqiten edhe pikat ($i=1,2,3,4,5,6$). Ajo është bërë me : 600, 6000, 60000 dhe 120000 hudsonje. Rezultatet e fituara janë paraqitur në këtë tabelë:

numri i hudsonjeve	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6 000	953	1053	1027	1028	982	957
60 000	9880	9989	9888	10206	10190	9847
120 000	19759	20065	19795	20232	20213	19936

Frekuencat relative për fillimin e ngjarjeve A_i ($i=1,2,3,4,5,6$) janë dhënë në këtë tabelë:

numri i hudhjeve	1	2	3	4	5	6
600	0,14	0,22	0,18	0,15	0,18	0,14
6 000	0,159	0,176	0,171	0,171	0,164	0,160
60 000	0,165	0,166	0,165	0,170	0,170	0,164
120 000	0,165	0,167	0,165	0,169	0,168	0,166

Kjo tabelë qartë tregon se frekuenca relative për fillimin e ngjarjeve A_i , si eksperimentalisht janë fituar madhësitë, çdonjëra në veçanti me vlerat e saja oscilon rreth numrit $\frac{1}{6} = 0,166\dots$, i cili natyrisht dhe në mënyrë intuitive na imponohet si gjasë për fillimin e ngjarjes *paraqitja e 1,2,3,4,5 ose 6 pikëve* në anën (faqen) e sipërme prej zarit të hudhur. Mund të vërehet se edhe preciziteti më i madh fitohet kur numri i hudhjeve është më i madh.

► **Shembulli 4.** Prej 96721 njerëz tridhjetëvjeçar, vitet e pesëdhjeta i përjetojnë 88043. Sa është gjasja një mostër (ekzemplar, prej tyre të përjeton të pesëdhjetat?

Zgjidhje. Pasi numri i njerëzve pesëdhjetëvjeçar është $m = 88043$, kurse numri i të anketuarve është $n = 96721$, gjasja tredhjetëvjeçari ta përjeton të pesëdhjetën është:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{88043}{96721} = 0,91.$$

DETYRA. Bëri eksperimentet. _____

1. Në tri seri prej nga 100 hudhjeve, hudh zarin. Përcakto gjasën për paraqitjen e numrit 5?
2. Në dy seri prej nga 100 hudhje, njëkohësisht hudhi dy monedha. Caktoje gjasën të paraqitet numri të dy monedhat?

PASKAL, BLEZ (Pascal Blaise) (1623-1662) – matematikan, fizikan, fillozof dhe shkrimtar francez. I lindur në familje të pasur, qarkullon në rrathët e larta politike, artistike dhe shkencore. Në moshën gjashtëmbëdhjetë vjeçare vërteton teoremën nga gjeometria, sot e njohur si *teorema e madhe e Paskalit*. Në moshën tetëmbëdhjetë vjeçare e mendon dhe e përpunon *makinë* njehsuese të parë në histori, e cila mund t'i kryen operacionet themelore aritmetike. Më vonë, përveç me matematikë merret edhe me eksperimente të fizikës në lidhje me shtypjen e ajrit. Sot, *njësia për matjen e shtypjes* e mban emrin e tij. Në vitet e tij të pjekurisë, pas mendimeve të gjera e krijon *Teorinë e tij të gjasës*. Prej këtyre hulumtimeve ka dalur edhe trekëndëshi prej numrave, koeficienti para anëtarëve të binomit prej çfarëdo fuqie, sot i njohur si *trekëndëshi i Paskalit*. Nga fundi i jetës së tij, për të harruar në dhembjen e dhëmbit prej të cilit ka vuajtur, tetë ditë është marrë me gjeometrinë e lakores *cikloida*. Atëherë, duke iu përkushtuar matematikës, arriti të zgjidh problemin më të madh në lidhje me të. I gjithanshëm, mbetet i përgjithmonshëm në botën e mendimit shkencor.

3.2.2. BASHKËSIA E NGJARJEVE TË RASTIT

Në rastet kur *fillimi i ngjarjeve janë me mundësi të barabarta*, do të flasim për **ngjarje me mundësi të barabarta** (ngjarje për fillimin e të cilave ekzistojnë kushte të barabarta). Për shembull, nëse zari është gjeometrikisht i rregullt dhe i bërë prej materialit homogjen, ngjarjet *paraqitja e anës (faqes) me këtë ose atë numër të pikëve* janë mundësi të barabarta; gjithashtu gjatë hudhjes të monedhës homogjene ngjarjet *paraqitja e stemës ose numrit* janë mundësi të barabarta. Të përmendim se ngjarjet: *paraqitja e anës me këtë ose atë numër të pikëve, paraqitja e stemës ose numrit* quhen **ngjarje elementare** për eksperimentin përkatës. Bashkësia e të gjitha ngjarjeve elementare në një eksperiment quhet **bashkësia e ngjarjeve elementare** të cilën e shënojmë me Ω . Ngjarjet të cilat nuk mund njëkohësisht të realizohen themi se **reciprokisht përjashtohen (ngjarje disjunkte)**. Për shembull, gjatë hudhjes së monedhës ngjarja *paraqitja e stemës* e përjashton ngjarjen *paraqitja e numrit*. Ekzistojnë edhe ngjarje të cilat **reciprokisht nuk përjashtohen**. Për shembull, gjatë nxjerrjes së dy biletave të lotarisë, ngjarjet *fitimi i biletës së parë dhe fitimi i biletës të dytë* nuk përjashtohen.

Shembulli 1. *Ta caktojmë bashkësinë e ngjarjeve elementare gjatë hudhjes së monedhës.*

Zgjidhje. Monedha ka dy anë (faqe) të shënuara me *stemë* dhe *numër*, domethënë bashkësia e ngjarjeve elementare është $\Omega = \{s, n\}$. ■

Shembulli 2. *Ta caktojmë bashkësinë e ngjarjeve elementare gjatë hudhjes së dy zareve, i zi dhe i bardhë.*

Zgjidhje. E dijmë se çdo anë e zarit është shënuar me pika prej 1 deri në 6. Nëse me (a, b) e shënojmë ngjarjen: *në zarin e zi në anën (faqen) e sipërme janë paraqitur a pikë, kurse në zarin e bardhë b pikë*, bashkësia e ngjarjeve elementare Ω përbëhet prej 36 ngjarjeve elementare që reciprokisht përjashtohen:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6);
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6);
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6);
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6);
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6);
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6). ■

Ngjarjet elementare, sikurse tregon edhe emri i tyre, nuk mund të sillen edhe në ngjarje më të thjeshta, por më së paku dy prej tyre mund të formohen **ngjarje të përbëra**.

Me ngjarjet e rastit, të lidhur për eksperimentin e dhënë, mund të realizojmë operacione me bashkësi. Prandaj për dy ngjarje rasti A dhe B mund t'i përkufizojmë këto relacione dhe operacione.

Përkufizimi 1. *Nëse gjatë çdo paraqitjeje të ngjarjes A , paraqitet edhe ngjarja B , atëherë themi se ngjarja A e tërheq (implikon) ngjarjen B , ose B e përmban A dhe e shënojmë $A \subset B$.*

Për shembull, në eksperimentin hudhja e zarit le të jetë A ngjarja: paraqitja e numrit 6, kurse B ngjarja: paraqitja e numrit çift. Pasi 6 është numër çift është e qartë se vlen relacioni $A \subset B$.

Përkufizimi 2. Shuma e ngjarjeve A dhe B është ajo ngjarje e cila paraqitet kur realizohet të paktën njëra prej ngjarjeve A ose B , atë e shënojmë me $A+B$ ose $A \cup B$.

Përkufizimi 3. Prodhimi i ngjarjeve A dhe B është ajo ngjarje e cila paraqitet kur njëkohësisht realizohet çdonjëra prej ngjarjeve A dhe B , atë e shënojmë me $A \cdot B$ ose $A \cap B$.

Përkufizimi 4. Ndryshimi i ngjarjeve A dhe B është ajo ngjarje e cila paraqitet kur njëkohësisht realizohet ngjarja A dhe nuk realizohet ngjarja B , atë e shënojmë me $A \setminus B$.

Të vërejmë se operacionet me ngjarjet e rastit vlejné edhe për më shumë se dy ngjarje.

➤ **Shembulli 3.** T'i caktojmë shumë, prodhimin dhe ndryshimin e ngjarjeve A dhe B në eksperimentin hudhja e zarit, nëse A është ngjarja: paraqitja e numrit të thjeshtë, kurse B ngjarja: paraqitja e numrit çift.

Zgjidhje. Ngjarja A përbëhet prej ngjarjeve elementare $\{2,3,5\}$, ndërsa ngjarja B përbëhet prej ngjarjeve elementare $\{2,4,6\}$, shuma e këtyre ngjarjeve do të jetë: $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$, prodhimi i këtyre ngjarjeve do të jetë: $A \cap B = \{2\}$, kurse ndryshimi $A \setminus B$ i këtyre ngjarjeve do të jetë: $A \setminus B = \{3,5\}$, ndërsa ndryshimi: $B \setminus A = \{4,6\}$. ■

Të vërejmë se për eksperimentin e dhënë, nëse A është ngjarje e rastit, atëherë ndryshimi $\Omega \setminus A$ është ngjarje e kundërt, të cilin do ta shënojmë me $\bar{A}$.

➤ **Shembulli 4.** Tre shenjtare gjuajnë në një cak. Le të jetë A_i ngjarja: shejtari i e qëllon cakun, për $i = 1, 2, 3$. Le të jetë B ngjarja: dy shejtare e qëllojné cakun, C ngjarja: të paktën një shejtar e ka qëlluar cakun dhe D është ngjarja: vetëm një shenjtare e ka qëlluar cakun. T'i paraqesim ngjarjet B, C dhe D me ndihmën e ngjarjeve elementare A_i , ($i = 1, 2, 3$).

Zgjidhje. Ngjarja B do të thotë dy shenjtare e kanë qëlluar cakun, për shembull i pari dhe i dyti, kurse i treti nuk e ka qëlluar cakun, që e shënojmë me $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$. Nëse i marrim parasysht edhe dy mundësitë tjera do të fitojmë:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Ngjarja C do të thotë: caku është qëlluar prej çfarëdo shenjtari, d.m.th.:

$$C = A_1 + A_2 + A_3.$$

Ndërsa ngjarja D do të jetë:

$$D = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3. \blacksquare$$

Që të mund ta caktojmë gjasën për realizimin e njërës ngjarje të rastit është e nevojshme të njihemi edhe me konceptin **ngjarje e volitshme**. Për shembull, nëse gjatë eksperimentit nxjerrim top prej geses së padukshme me numër të barabartë të topave, prej të cilëve 5 janë të kuq kurse 4 të kaltër, topi i nxjerrë të jetë i kuq dhe me të vërtetë nxjerrim top të kuq, ngjarja e rastit *nxjerrja e topit të kuq* do të jetë ngjarje e volitshme. Ndërsa ngjarja e rastit *nxjerrja e topit të kaltër* do të jetë **ngjarje e pavolitshme** për këtë eksperiment.

DETYRA

1. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare në eksperimentin i cili përbëhet prej *hudhjes së monedhës tri herë lartë*. Cilat ngjarje elementare janë të volitshme për ngjarjen *A*: *dy herë të paraqitet stema, kurse një herë numri*?
2. *Një monedhë dhe një zar janë hudhur menjëherë*. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare në eksperiment?
3. Është realizuar eksperiment *zgjedhja e dy numrave prej numrave 1,2,3,4,5*, në këtë mënyrë: së pari është zgjedhur një numër, kurse pastaj numri i dytë është zgjedhur prej katër të tjerëve. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare. Cilat prej tyre janë të volitshme për ngjarjen: *janë zgjedhur dy numra tek*?
4. Eksperimenti i rastit është: *njëkohësisht nxjerrja e tre topave prej qeses së padukshme*. Në të ka 2 topa të bardhë (b_1, b_2), 2 të kuq (c_1, c_2) dhe një të kaltër (k). Caktoji ngjarjet:
a) *të tre topat janë me ngjyra të ndryshme*,
b) *prej tre topave, dy janë të kuq*.
5. Makina për kontrollimin e rregullshmërisë së prodhimeve është kontsruktuar ashtu që në rastin e parregullshmërisë së prodhimitt jep sinjal me zë. Kontrollohen 3 prodhime, përshkruaji ngjarjet:
A: vetëm një prodhim është në rregullë; B: të paktën një prodhim është në rregullë;
C: saktë dy prodhime janë në rregullë; D: të paktën dy prodhime janë në rregullë.
6. Eksperimenti është: *hudhja e zarit në lartësi*. Le të jetë ngjarja *A*: *paraqitja e numrit tek*, kurse ngjarja *B*: *paraqitja e numrit të plotëpjesëtueshëm me 3*. Caktoji ngjarjet: $\Omega, A \cup B, A \cap B$ dhe $\bar{A} \cap \bar{B}$.
7. Hudhen njëkohësisht dy zare. Ngjarja *A* le të jetë: *paraqitja e numrit çift në të dy zaret*; *B*: *shuma e numrave është 8*; *C*: *të dy numrat janë të njëjtë*. Caktoji ngjarjet: $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C, B \cup C$.
8. Eksperimenti i rastit është: *hudhja e zarit*. Ngjarja *A*: *paraqitja e numrit jo më të vogël se 3 dhe qartë jo më i madh se 6*, kurse ngjarja *B*: *paraqitja e numrit më të madh se 1 dhe jo më i madh se 4*. Cakto ndryshimin e ngjarjeve *A* dhe *B*.

BERNULI, JAKOB (Bernoulli Jakob) (1654-1705) – profesor i matematikës në Bazel (Zvicër), njëri nga tetë matematikanët e familjes së njohur Bernuli. Merret me idetë e reja në matematikë në kohën e vet. Jep kontribut të madh në zhvillimin e njehsimit diferencial, ka meritë të madhe në themelimin e njehsimin e variacionit. Me rëndësi të madhe është edhe kontributi i Jakobit në teorinë e gjasës. Në vitin 1689 e zbulon ligjin e numrave të mëdhej, të ashtuquajtur teorema e Bernulit. Punimet e tij nga kjo fushë janë vendosur në veprën *Shkathtësia për të qëlluar*, të botuar në vitin 1713, tetë vjet para vdekjes së tij. Ai është shembull më karakteristik për atë se si trashëgimia dhe rrethi luajnë rol të madh dhe të barabartë në krijimin e personave gjenial.

3.2.3. PËRKUFIZIMI KLASIK I GJASËS

Vërejtëm se ngjarjet prej bashkësisë së ngjarjeve elementare gjatë eksperimentit të dhënë janë veçanërisht të mundshme, tnjësoj të mundshme dhe reciprokisht përjashto-hen, por e dijmë edhe se si caktohet numri i tyre, si edhe numri i ngjarjeve të volitshme pra mund ta shprehim të ashtuquajturën **përkufizim klasik për gjasën**. Ajo është e gjasës për realizimin e ngjarjes e cila caktohet prej më parë dhe prandaj, sikurse tani theksuam, quhet *gjasë a priori* dhe paraqet paraardhëse logjike e njohjes së ngjarjeve nga jeta e përditshme.

Përkufizimi. Për eksperimentin e dhënë, ku të gjitha ngjarjet elementare prej bashkësisë së ngjarjeve elementare janë njësoj të mundshme, gjasë për realizimin e ngjarjes A , $P(A)$, quhet numri i cili paraqet raportin e numrit p prej ngjarjeve elementare të volitshme për ngjarjen e dhënë A dhe numrit n i të gjitha ngjarjeve elementare prej bashkësisë së ngjarjeve elementare.

$$P(A) = \frac{p}{n}$$

Për gjasën e ngjarjes së sigurtë, kur të gjitha ngjarjet elementare janë të volitshme për ngjarjen A , kemi $p = n$, pra $P(\Omega) = 1$.

Për gjasën e ngjarjes së pamundshme, kur asnjëri prej ngjarjeve elementare nuk është i volitshëm për ngjarjen A , kemi $p = 0$, pra $P(\emptyset) = 0$.

Pasi: $0 \leq p \leq n$, për gjasën e ngjarjes së rastit A vlen $0 \leq P(A) \leq 1$.

Të vërejmë edhe se për gjasën e ngjarjes së kundërt $\bar{A}$, të ngjarjes A vlen $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

➤ **Shembulli 1.** Monedha e rregulltë hudhet lartë. Sa është gjasë të paraqitet stema?

Zgjidhje. Ta shënojmë ngjarjen *paraqitja e stemës* me A . Numri i ngjarjeve elementare prej bashkësisë së ngjarjeve elementare është $n = 2$, numri i ngjarjeve të volitshme $p = 1$, domethënë gjasë e kërkuar do të jetë: $P(A) = \frac{p}{n} = \frac{1}{2} = 0,5$.

➤ **Shembulli 2.** Sa është gjasë e zarit të hudhur, e numëruar me pika prej 1 deri më 6, të paraqitet: a) numër çift, b) numër më i vogël se 5, c) çfarëdo numër prej 1 deri më 6, ç) numri 10, d) të mos paraqitet numri 4.

Zgjidhje. Numri i të gjitha ngjarjeve elementare është $n = 6$, ato janë elementet prej bashkësisë: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Ngjarja A është: *paraqitja e numrit çift*. Ngjarje të volitshme janë $\{2, 4, 6\}$, domethënë numri i tyre është $p=3$, prandaj: $P(A) = \frac{p}{n} = \frac{3}{6} = 0,5$;

b) Ngjarja B është: *paraqitja e numrit më të vogël se 5*. Ngjarje të volitshme janë $\{1, 2, 3, 4\}$, domethënë numri i tyre është $p = 4$, prandaj: $P(B) = \frac{p}{n} = \frac{4}{6} = 0,6666\dots$;

- c) Ngjarja C është: *paraqitja e çfarëdo numri prej 1 deri më 6*. Ngjarje të volitshme janë $\{1,2,3,4,5,6\}$, domethënë numri i tyre është $p = n = 6$, prandaj kemi gjasë të ngjares së sigurtë, përkatësisht: $P(C) = 1$;
- ç) Ngjarja G është: *paraqitja e numrit 10*. Ajo është ngjarje e pamundshme, prandaj $P(G) = 0$;
- d) Ngjarja D është: *nuk paraqitet numri 4*. Gjasa të paraqitet numri 4 është $\frac{1}{6}$, prandaj gjasa e ngjarjes së tij të kundërt, ngjarja D është: $P(D) = 1 - \frac{1}{6} = 0,8333... \blacksquare$

➤ **Shembulli 3.** Janë hudhur dy zare, të numëruara prej 1 deri më 6. Sa është gjasa se do të paraqitet: a) shuma 8, kurse ndryshimi 4, b) shuma 5, kurse prodhimi 4.

Zgjidhje. Këtu numri i përgjithshëm i ngjarjeve elementare të bashkësisë prej ngjarjeve elementare është $n = \bar{V}_6^2 = 6^2 = 36$, (pse!).

a) Numri i ngjarjeve elementare, të volitshme për ngjarjen A : shuma 8, kurse ndryshimi 4 do të jetë $p = 2$ dhe ato janë ngjarjet: $\{(2,6), (6,2)\}$; prandaj gjasa e ngjarjes së kërkuar A do të jetë:

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0,0555... \blacksquare$$

b) Numri i ngjarjeve elementare, të volitshme për ngjarjen B : shuma 5, kurse prodhimi 4 është gjithashtu $p = 2$ dhe ato janë ngjarjet: $\{(1,4), (4,1)\}$; gjasa e ngjarjes së kërkuar B do të jetë numër i njëjtë:

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0,0555... \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Në një kuti ka 15 sende të njëllojta sipas formës dhe madhësisë, prej të cilëve 10 të ngjyrosura. Prej kutisë me zgjedhje rasti nxjerrim tri sende. Sa është gjasa se të gjitha sendet e nxjerra do të jenë të ngjyrosura?

Zgjidhje. Këtu ngjarja A është: *janë nxjerrë tri sende të ngjyrosura*. Numri i përgjithshëm i ngjarjeve elementare është i barabartë me numrin e kombinacioneve prej klasës 3-të pa përsëritje prej 15 elemente, d.m.th. $n = C_{15}^3 = 455$. Numri i ngjarjeve elementare të volitshme për ngjarjen A do të jetë $p = C_{10}^3 = 120$. Prandaj gjasa e ngjarjes së kërkuar është:

$$P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} = 0,2637... \blacksquare$$

Ta kryejmë temën, në pjesën për gjasën tani i kemi njohuritë fillestare, me problemin të parashtruar në fillim shembulli 1 prej 3.2.1

➤ **Shembulli 5.** Problemi i De Merit.

Zgjidhje. Shuma e anës (faqes) së sipërme të tre zareve të hudhura mund të jetë njëri prej numrave prej 3 deri më 18 dhe po ashtu i kemi këto mundësi pët të fituar shumën 11 dhe 12:

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+4+2 = 5+5+1 = 4+4+3 = 3+3+5.$$

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 5+4+3 = 6+3+3 = 5+5+2 = 4+4+4.$$

Rezultati të tre mbledhës at janë të ndryshëm, mund të paraqitet në $3! = 6$ mënyra të ndryshme.

Rezultati dy mbledhësa janë të barabartë, mund të paraqitet në 3 mënyra.

Rezultati të tre mbledhës at janë të barabartë, mund të paraqitet vetëm në një mënyrë.

Prandaj:

Shuma 11 fitohet në $3! + 3! + 3! + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$ mënyra.

Shuma 12 fitohet në $3! + 3! + 3! + 3 + 3 + 1 = 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 25$ mënyra.

Por pasi numri i të gjitha ngjarjeve elementare të mundshme janë variacione me përsëritje prej 6 elemente të klasës tretë, numri i të cilave është $\overline{V}_6^3 = 6^3 = 216$, për gjasën kemi:

$$P(11) = \frac{27}{216} = 0,125 \wedge P(12) = \frac{25}{216} = 0,11574.$$

Domethënë De Meri me të drejtë ka vërejtur se në lojë gjatë hüdhes të përnjëhershme të tre zareve, shuma 11 fitohet më shpesh se sa shuma 12, por pse është kjo kështu është përgjigjur B. Paskal, zgjidhja e të cilit, kuptohet me shenja bashkëkohore matematikore, e prezentojmë në këtë shembull. ■

DETYRA

1. Rastësisht është zgjedhur numër natyror jo më i madh se 10. Përcaktoje gjasën numri i zgjedhur të jetë i thjeshtë.
2. Monedha është hüdhet tri herë. Përcaktoje gjasën të paraqitet numri saktë dy herë.
3. Caktoje gjasën numri natyror rastësisht i zgjedhur, i cili nuk është më i madh se 100, të jetë fuqi me tregues më të madh se 1 të ndonjë numri natyror.
4. Radiogypi përbëhet prej tri pjesë: shtëpizës, katodës dhe anodës. Gjatë kontrollimit të rregullshmërisë së prodhimit patjetër duhet të kontrollohet rregullshmëria e çdo pjese në veçanti. Sa është gjasa radiogypi të jetë në rregull.
5. Monedha e rregulltë hüdhet në lartësi dy herë. Sa është gjasa:
a) të mos paraqitet asnjë stemë; b) të paraqitet një stemë; c) të paraqiten dy stema?
6. Caktoje gjasën për paraqitjen e shumës 8, gjatë një hüdhe të përnjëhershme të dy zareve.
7. Sa është gjasa gjatë eksperimentit: *hüdha e 2 zareve*, të paktën një herë të paraqitet 6.
8. Ndërmjet 20 sendeve 7 janë jo të rregullta. Rastësisht menjëherë janë zgjedhur 5 sende. Caktoje gjasën ndërmjet tyre të mos ketë jo të rregullta.
9. Në një kuti gjenden 6 topa të bardhë dhe 4 të zi. Menjëherë janë nxjerrë 3 topa. Sa është gjasa të tre topat të jenë me ngjyrë të njëjtë?
10. Në një kuti ka 3 topa të bardhë, 7 të kuq dhe 8 të kaltër. Sa është gjasa gjatë nxjerrjes së përnjëhershme të dy topave njëri të jetë i bardhë, kurse tjetri i kuq?

3. DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

Me induksion matematikor vërteto se vlen:

1. a) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$, b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. a) $9 \mid (7^n + 3n + 8)$, b) $5 \mid (n^5 - n)$.

3. $3^n \geq 2n + 1$, $n \geq 1$.

4. Njehso: $7! \left(\frac{6!}{8!} + \frac{4!}{6!} \right) - 8! \left(\frac{7!}{9!} - \frac{4!}{7!} \right)$.

5. Zgjidhi barazimet: a) $\frac{x!}{(x-1)!} = 9$, b) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 132$.

6. Thjeshtoji thyesat: a) $\frac{n!}{(n+1)! - n!}$, b) $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)!}$.

7. Njehso: a) $\binom{6}{2} + \binom{6}{4}$; b) $\binom{9}{3} - \binom{9}{6}$; c) $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$.

Zgjidhi barazimet:

8. a) $\binom{x+1}{2} : \binom{x}{3} = 4 : 5$; b) $\binom{x}{1} + \binom{x+4}{2} = 162$.

9. $V_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$.

10. $9V_x^3 = 5 \overline{V}_x^3$.

11. Sa numra natyrorë më të mëdhej se 4000 mund të shkruash prej shifrave 2,3,5,6 nëse nuk i përsërit?

12. Në sa mënyra mund t'i radhisish 6 njerëz: a) në një bangë, b) në tavolinë të rrumbullakët?

13. Në sa mënyra të ndryshme mund të plotësosh fletë për prognozë sportive nëse ka 12 ndeshje?

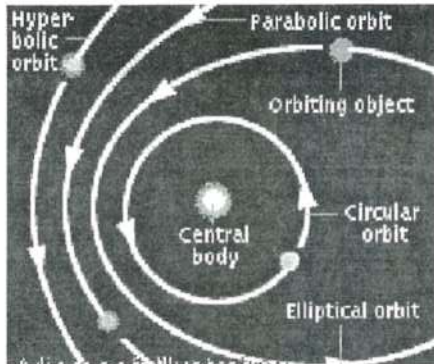
14. Sa stacione hekurudhore ka në një hekurudhë nëse për udhëtime të ndryshme ekzistojnë 552 bileta të ndryshme?

15. Janë dhënë 9 pika në hapësirë, prej të cilave asnjëra prej 3 nuk i takojnë drejtëzës së njëjtë dhe asnjë prej 4 nuk janë në rrafshin e njëjtë. Përcaktoje numrin e: a) drejtëzave, b) trekëndëshave, c) tetraedrave të cilët mund t'i formosh prej pikave të dhëna.

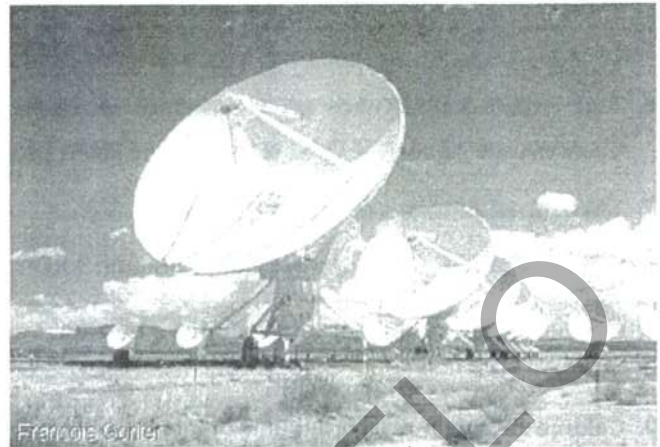
16. Tetë nxënës kualifikohen për pjesëmarrje në kuizin e shkollës. Në sa mënyra mund të formosh ekip dyanëtarëshe: të parë, të dytë, të tretë dhe të katërt prej tetë nxënës?
17. Shkruaje në formën e zbërthyer fuqinë $(2a + 3b)^5$.
18. Cili është anëtar i tetë në zbërthimin e binomit $(2\sqrt{x} - x\sqrt{8})^{10}$.
19. Caktoje anëtarin e mesëm në zbërthimin e binomit $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$.
20. Caktoje atë anëtar në zbërthimin e binomit $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$ i cili nuk e përmban x .
21. Në ashensorin e ndërtesës pesëkatëshe hyjnë 3 persona. Çdonjëri prej tyre del në çfarëdo kat (duke filluar prej të parit) me gjasë të barabartë. Njehso sa është gjasja:
 - a) të gjithë të dalin në katin e tretë;
 - b) të gjithë të dalin njëkohësisht;
 - c) të gjithë të dalin në kate të ndryshme.
22. Prej shpilit prej 52 letra rastësisht janë tërhequr dy letra. Caktoje gjasën ato të jenë nëntëshe dhe dhjetëshe.
23. Në një enë gjenden 9 topa të bardhë, 8 të kuq dhe 7 të kaltër. Sa është gjasja njëkohësisht të mos tërheqësh 2 topa të kaltër?
24. Ke pesë segmente me gjatësi prej 2, 4, 5, 7, 9 njësi. Caktoje gjasën prej tri segmenteve rastësisht të zgjedhura se do të mund të konstruktosh trekëndësh.
25. Studenti ka ardh në provim duke i ditur 85 prej 100 pyetjeve. Në provim ka marrë fletën me tri pyetje. Cakto gjasën se studenti do t'i dinë të tri pyetjet.
26. Gjatë gjuajtjes me pushkë frekuenca relative për të qëlluar cakun është 0,90. Caktoje numrin e të qëlluarave nëse është gjuajtur 230 herë në cakun?

KOLMOGOROV, ANDREJ NIKOLAEVIÇ (1903-1987) – matematikan, akademik rus

Fusha e interesit shkencor e Kolmogorovit përfshin shumë fusha të matematikës dhe ai ka botuar vepra prej të gjitha atyreve. Megjithatë, kontributi i tij më i madh është në teorinë e gjasës, ai ka arritur të zgjidh shumë probleme nga kjo fushë dhe të konstruktonte bazë aksiomatike të teorisë së gjasës. Të njohura janë ligjet e Kolmogorovit për numrat e mëdhej dhe testet për hipotezat statistike. Këto probleme, të dalura nga jeta e përditshme i ka përpunuar dhe zgjidhur, kurse më vonë i boton në veprën *Konceptet themelore të teorisë së gjasës*, 1933. Si krijues dhe pedagog ai ngel i shënuar në analet e matematikës bashkëkohore.



Orbitat qiellore



Ta dëgjojmë Gjithësinë!

Gjithësia është shumë e madhe, hapsërirë e pafundme, e cila më së miri përshkruhet në kuptimin matematikor: sa do që të jetë larg trupi më i ri i zbuluar qiellor, i larguar për shumë vjetë drite, ka trupa qiellor më larg se edhe ai, etj. Atë që e shikojmë kudo mbi ne është vetëm një pjesë e gjithësisë së pamatur. Në atë hapësirë të pafundme lëvizin trupa të ndryshëm qiellor, dhe që është më e rëndësishme, ajo lëvizje është jashtëzakonisht e rregulltë, kryhet sipas shtigjeve-trajektoreve saktë të caktuara. Për hapësirat më afër nesh ato janë përcaktuar sipas ligjeve planetare, kurse për hapësirat më larg nesh sipas ligjeve të yjeve dhe trupave tjerë qiellor: planetoidët, satelitët, asteroidët, kometat, meteorët, maglinët etj.

Nxjtje, gjithqysh!

Trajektorët e trupave qiellor do t'i shqyrtojmë në këtë temë, ato janë lakoret e rendit të dytë-prerjet konike: vija rrethore, elipsa, hiperbola, parabola. Por së pari në temën që vijon, *gjeometria analitike*, do të bëhet fjalë për drejtëzën. Në bazën e gjeometrisë analitike bazohet metoda e koordinatave, e cila mundëson zgjidhjen e detyrave gjeometrike me ndihmën e aparatit algjebrik. Që një detyrë të atillë:

Detyrë:

Trajektorja e një trupi është elipsë $2x^2 + 5y^2 = 40$, trupi tjetër lëviz sipas trajektore drejtvizore: $x - y + 20 = 0$. A është e mundshme të goditen?

Zgjidhje:

Trajektorët, sigurisht, do t'i shqyrtojmë në të njëjtin sistem kënddrejtë koordinativ.

Elipsën do ta shkruajmë në formën: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1$, barazimin e saj do ta pjesëtojmë me 40 dhe pastaj e rregullojmë.

Prej këtui mund ta shikojmë se $a^2 = 20$, kurse $b^2 = 8$ (a - gjysmëboshti i madh, b -gjysmëboshti i vogël); me këtë do të njihesh në temën që vijon.

Drejhtëzën e shkruajmë në formën kanonike: $y = x + 20$, prej ku $k=1$, $n=20$ (k -koeficienti i drejtimit, n -segmentin që drejtëza e prenë prej boshtit y); këtë e dinë prej më parë.

Nëse të dhënat e fituara i zëvendësojmë për prekjen e elipsës me drejtëzën: $a^2 k^2 + b^2 - n^2 = 0$, do të fitojmë: $20 \cdot 1 + 8 - 400 < 0$ ($\neq 0$). Përfundojmë se drejtëza nuk ka pika të përbashkëta me elipsën, d.m.th. është jashtë prej elipsës.. *Ura! Nuk ka goditje!*

Përgjigjet e pyetjeve, që sigurisht i ke, (këtu ka shumë punë të reja për ty), do t'i gjesh përmes përmbajtjeve që vijnë.

GJEOMETRIA ANALITIKE

Gjeometria analitike është pjesë e matematikës e cila i studion figurat dhe pozitën reciproke të tyre me ndihmën e metodave algjebrike.

Dy detyrat themelore të gjeometrisë analitike janë:

- nëse është dhënë bashkësia e pikave në rrafsh ose hapësirë, të përkufizuar me një numër të caktuar të vetive, të formohet barazimi i saj.
- nëse është dhënë barazimi i cili si ndryshore i përmban koordinatat e pikave, të caktohet bashkësia e pikave dhe të konstruktohet grafiku i saj.

Me detyrën e dytë je njohur në vitet paraprake gjatë të mësuarit e barazimit linear dhe katror. Kështu për shembull, tani më e dinë se me barazimin $y = ax + b$ është përcaktuar funksioni linear grafiku i të cilit është drejtëz në rrafsh, kurse me barazimin $y = ax^2$ është përcaktuar funksion katror grafiku i të cilit është parabolë me kulm në fillimin e koordinatave kurse është simetrike në lidhje me boshtin y .

Këtu kryesisht do të ndalemi në përcaktimin e barazimeve të drejtëzës dhe lakoreve të rendit të dytë (vija rrethore, elipsa, hiperbola dhe parabola) në bazë të vetive të tyre gjeometrike, duke i shfrytëzuar poashtu lidhjet themelore ndërmjet algjebres dhe gjeometrisë të paraqitura në këtë tabelë:

algjebrike	gjeometrike
1. (x, y) çifti i radhitur i numrave realë.	1. Pika me koordinata x dhe y
2. Barazimi linear ose katror me dy ndryshore	2. Drejtëza ose lakorja prej rendit të dytë si bashkësi e pikave (V.GJ.P)
3. Çifti i radhitur (x, y) numerikisht e kënaqin barazimin linear ose katror me dy ndryshore	3. Pika T me koordinata (x, y) shtrihet në drejtëz ose lakore e rendit të dytë
4. Zgjidhja e sistemit prej dy barazimeve lineare ose katrore me dy të panjohura ose një barazim linear dhe një katror	4. Prerja e dy drejtëzave ose dy lakoreve të rendit të dytë ose drejtëzës dhe lakores të rendit të dytë në rrafsh

4.1. KOORDINATAT E PIKËS DHE VEKTORI NË SISTEMIN KËNDREJTË KOORDINATIV.

4.1.1. SISTEMI KËNDREJTË KOORDINATIV

1. Për zbatimin e matematikës në disiplinat e ndryshme ka nevojë boshtin numerik dhe sistemin kënddrejtë koordinativ t'i përkufizojmë me ndihmën e vektorëve. Për këtë qëllim shkurtimisht do të përkujtohem në disa veti të vektorëve të cilat i ke të njohura nga viti i parë.

Prodhiimi i vektorit $\vec{a}$ me skalar k është vektor $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ i cili është kolinear me vektorin $\vec{a}$, ka gjatësi $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$, dhe është me kahe të njëjtë me $\vec{a}$ nëse $k > 0$ kurse me kahe të kundërt nëse $k < 0$.

Prej këtu drejtpërdrejt vijon ky gjykim: *raporti i dy vektorëve kolinear $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ është numër real k , pozitiv ose negativ varësisht prej asaj a janë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ me kahe të njëjtë ose të kundërt, kurse vlera absolute është e barabartë me raportin prej gjatësive të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Domethënë, nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektorë kolinear, atëherë vlen:*

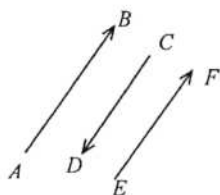


fig.1

1° $\frac{\vec{b}}{\vec{a}} = k$; 2° $k > 0$ nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë me kahe të njëjtë,

dhe $k < 0$ nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ me kahe të kundërt; 3° $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = |k|$.

Në fig.1 janë paraqitur vektorët kolinear $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ dhe për ato vlen:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} > 0, \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} < 0, \quad \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{EF}} < 0$$

Vektori me gjatësi një quhet **vektor njësi** ose **ort**.

Në pajtim me gjykimet e sipërme, nëse $\vec{e}$ është vektor njësi i cili është kolinear me vektorin $\vec{a}$, atëherë:

$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$ nëse $\vec{e}$ dhe $\vec{a}$ janë me kahe të njëjtë dhe $\vec{a} = -|\vec{a}| \cdot \vec{e}$ nëse $\vec{e}$ dhe $\vec{a}$ janë me kahe të kundërta.

Përkufizimi 1. Drejtëza l në të cilën është zgjedh pika fillestare O dhe vektor njësi $\vec{i}$ e quajmë **bosht** ose **sistem linear koordinativ**, dhe e shënojmë me $(O, \vec{i})$ ose Ol (fig.2).

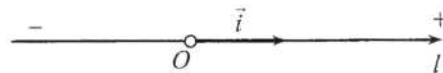


fig.2

Përkufizimi 2. *Madhësia algebrike e vektorit $\overrightarrow{AB}$, i cili shtrihet në boshtin $(O, \vec{i})$ ose është kolinear me të, është e barabartë me raportin e vektorit $\overrightarrow{AB}$ dhe vektorit njësi $\vec{i}$ të boshtit dhe e shënojmë me $\overline{AB}$. Domethënë*

$$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}}. \quad (1)$$

Pasi $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \vec{i}$ ose $\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot \vec{i}$, vijon

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} = \pm |\overrightarrow{AB}| \quad (2)$$

që do të thotë se, madhësia algebrike e vektorit është numër i barabartë me gjatësinë e vektorit të marrë me shenjën „+” ose „-”, varësisht prej asaj vektori a ka kahe të njëjtë ose të kundërt me vektorin njësi të boshtit.

Le të jetë M çfarëdo pikë e boshtit $(O, \vec{i})$ (fig.3)

Përkufizimi 3. *Koordinata e pikës M e boshtit $(O, \vec{i})$ është madhësia algebrike e vektorit $\overrightarrow{OM}$.*

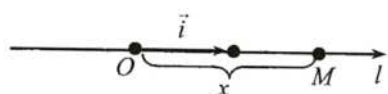


fig.3

Domethënë, nëse $\overrightarrow{OM} = x$, atëherë x është koordinata e M , që simbolikisht e shkruajmë me $M(x)$ dhe poashtu vlen

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} \quad (3)$$

Ndërmjet numrave realë dhe pikave prej boshtit $(O, \vec{i})$ ekziston shoqërim të ndërsjelltë. Çdo pike $M \in (O, \vec{i})$ i përgjigjet vektor i vetëm $\overrightarrow{OM}$ prandaj edhe numri i vetëm real x i cili është koordinatë për M dhe, anasjelltas, çdo numri real i përgjigjet vektor i vetëm $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$, prandaj edhe pika e vetme $M(x)$ e boshtit e cila është pasqyrë e atij numri.

Le të jetë $A(x_1)$ dhe $B(x_2)$ dy pika të boshtit $(O, \vec{i})$ (fig.4). Ta caktojmë madhësinë algebrike dhe gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$ nëpërmjet koordinatave të pikave të skajshme.

Në pajtim me rregullën për mbledhjen e vektorëve, kemi:



fig.4

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

por, $\overrightarrow{OB} = x_2 \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OA} = x_1 \cdot \vec{i}$, pra fitojmë

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = x_2 \cdot \vec{i} - x_1 \cdot \vec{i} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i}$$

prej ku vijon

$$\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1 \quad (4)$$

Domethënë, madhësia algebrike e vektorit $\overrightarrow{AB} \in (O, \vec{i})$ është e barabartë me ndryshimin e koordinatave të pikës së mbarimit dhe të fillimit.

Për gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$, prej (2) dhe (4), fitojmë:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |x_2 - x_1| \quad (5)$$

Por, numri $|\overrightarrow{AB}|$ njëkohësisht e paraqet edhe largësinë $d(A, B)$ ndërmjet pikave $A(x_1)$ dhe $B(x_2)$, pra kemi:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |x_2 - x_1| \quad (6)$$

► **Shembulli 1.** *Ta caktojmë madhësinë algjebrike dhe gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$ [A(3), B(-5)] $\in (O, \vec{i})$.*

Zgjidhje. Në pajtim me formulën (4), madhësia algjebrike është: $\overrightarrow{AB} = (-5) - 3 = -8$, kurse prej (5) për gjatësinë kemi $|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}| = |-8| = 8$. ■

2. Përkufizimi 4. *Bashkësia e dy boshteve reciprokisht normale $Ox \equiv (O, \vec{i})$ dhe $Oy \equiv (O, \vec{j})$, ku $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ janë vektor njësi i boshteve, paraqet **sistem kënddrejtë koordinativ** në rrafsh. E shënojmë me $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ose xOy . Pika O është fillimi i koordinatave, $(O, \vec{i})$ boshti i **abshisë**, kurse $(O, \vec{j})$ boshti i **ordinatës**.*

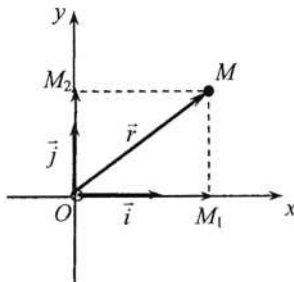


fig.5

Le të jetë $M(x, y)$ çfarëdo pikë në rrafsh me sistem të zgjedhur koordinativ xOy (fig.5).

Përkufizimi 5. *Vektori $\overrightarrow{OM}$, fillimi i të cilit është në fillimin e koordinatave kurse mbarimi në pikën M, quhet **rreze vektor për pikën M** dhe zakonisht e shënojmë me $\vec{r}_M$ ose vetëm me $\vec{r}$.*

T'i caktojmë koordinatat e vektorit $\overrightarrow{OM}$ në lidhje me sistemin koordinativ $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le të jenë M_1 dhe M_2 projektionet ortogonale të pikës M e boshtit Ox dhe Oy , përkatësisht. Atëherë $\overrightarrow{OM_1}$ dhe $\overrightarrow{OM_2}$ janë projektionet ortogonale të vektorit $\overrightarrow{OM}$ në boshtet Ox dhe Oy . Prej fig.5 shikojmë se

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

Le të jetë $\overrightarrow{OM_1} = x$, $\overrightarrow{OM_2} = y$, atëherë $\overrightarrow{OM_1} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$, pra prej barasisë së fundit fitojmë:

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}. \quad (7)$$

edhe në këtë rast themi se rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$ është **zbërthye** sipas vektorëve njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

Numrat realë x dhe y janë **koordinata** të rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$, dhe shkruajmë

$$\overrightarrow{OM} = (x, y).$$

Por, koordinatat x dhe y janë njëkohësisht edhe koordinata të pikës M , pra vijon: *koordinatat e rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$ janë të barabarta me koordinatat e pikës së skajshme M .*

Vektorët $x \cdot \vec{i}$ dhe $y \cdot \vec{j}$ i quajmë **komponenta të vektorit** $\overrightarrow{OM}$ në drejtim të boshteve koordinative Ox dhe Oy , përkatësisht, kurse shënimin (7) e quajmë zbërthimi i vektorit $\overrightarrow{OM}$ sipas komponentave.

➤ **Shembull 2.** T'i caktojmë koordinatat e rreze vektorit për pikën $M(-3,5)$, dhe ta paraqesim sipas komponentave të tij.

Zgjidhje. Koordinatat e rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$ janë: $x = -3$, $y = 5$ d.m.th. $\overrightarrow{OM} = (-3,5)$, por i paraqitur sipas komponentave është: $\overrightarrow{OM} = (-3)\vec{i} + 5\vec{j}$.

T'i caktojmë tani koordinatat e çfarëdo vektori në lidhje me sistemin koordinativ $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

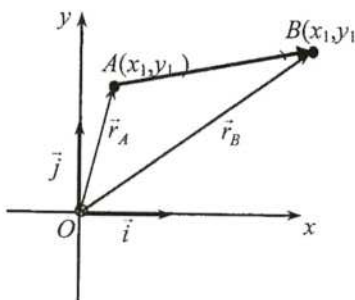


fig.6

Le të jetë dhënë vektori $\overrightarrow{AB}$ me koordinatat e pikave të skajshme: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (fig.6). Koordinatat e $\overrightarrow{AB}$ le të jenë (x, y) , d.m.th.

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Për rreze vektorët $\vec{r}_A$ dhe $\vec{r}_B$ të pikave A dhe B , në pajtim me (7), kemi:

$$\vec{r}_A = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}, \quad \vec{r}_B = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$$

Prej rregullës për zbritje të vektorëve kemi

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1 \quad (8)$$

d.m.th.

Vijon

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Domethënë, koordinatat e vektorit të dhënë me koordinatat e pikave të skajshme, i fitojmë kur prej koordinatave të pikës së skajshme i zbresim koordinatat përkatëse të pikës së fillimit.

Është e qartë se për zero vektor të dy koordinatat janë zero, d.m.th.

$$\vec{0} = (0,0) = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$$

➤ **Shembulli 3.** T'i caktojmë koordinatat dhe komponentat e vektorëve për vektorin $\overrightarrow{AB} [A(-5,1), B(3,2)]$.

Zgjidhje. Për koordinatat e dhëna të pikave $x_1 = -5$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$, koordinatat e vektorit janë: $x = 3 - (-5) = 8$, $y = 2 - 1 = 1$, kurse vektorët e komponentave janë $8\vec{i}$ dhe $\vec{j}$. Domethënë, $\overrightarrow{AB} = (8,1)$ ose i zbërthyer sipas komponentave: $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + \vec{j}$.

► **Shembulli 4.** T'i caktojmë koordinatat e vektorëve njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

Zgjidhje. Vektori njësi $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$ është rreze vektor për pikën $E_1(1,0)$, kurse vektori njësi $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$ është rreze vektor për pikën $E_2(0,1)$, pra vijon

$$\vec{i} = (1,0), \quad \vec{j} = (0,1) \quad \text{d.m.th.} \quad \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}, \quad \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} \quad \blacksquare$$

DETYRA

- Në boshtin $(O, \vec{i})$ konstruktoji pikat $A(2)$, $B(-3)$ dhe $C(-\frac{5}{2})$ kurse pastaj përcaktoje madhësinë algjebrike të vektorëve $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ dhe $\overrightarrow{OC}$.
- Janë dhënë pikat $M_1(1)$ dhe $M_2(6)$. Caktoje madhësinë algjebrike të vektorit $\overrightarrow{M_2M_1}$.
- Në boshtin numerik konstrukto pikë simetrike të pikës $M(4)$ në lidhje me pikën e fillimit O .
- Cilat janë koordinatat e rreze vektorëve $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ dhe $\overrightarrow{OD}$, nëse pikat A, B, C dhe D kanë koordinata: $A(0,1)$, $B(-2,-7)$, $C(-4,5)$, $D(-8,0)$ dhe $O(0,0)$.
- Cilat janë koordinatat e pikave A, B, C , dhe D , nëse rreze vektorët e tyre janë: $\overrightarrow{OA} = (1,-2)$, $\overrightarrow{OB} = (0,7)$, $\overrightarrow{OC} = (-2,0)$ dhe $\overrightarrow{OD} = (-3,-4)$, përkatësisht.
- Konstrukto rreze vektorët: $\overrightarrow{OA} = (2,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,2)$, $\overrightarrow{OC} = (1,1)$, $\overrightarrow{OD} = (-1,5)$ në rrafshin koordinativ xOy .
- Caktoji komponentat e vektorëve: a) $\vec{a} = 5\vec{i} - 9\vec{j}$ b) $\vec{b} = -7\vec{i}$ c) $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{j}$
- Caktoji koordinatat e vektorëve: a) $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$ b) $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ c) $\vec{c} = -5\vec{j}$
- Pika e fillimit të vektorit $\vec{a}$ është A . Caktoji koordinatat e pikës së skajshme B nëse është:
a) $A(0,0)$, $\vec{a} = (-2,1)$ b) $A(-1,5)$, $\vec{a} = (1,-3)$ c) $A(2,7)$, $\vec{a} = (-2,-5)$.

4.1.2. OPERACIONE ME VEKTORË TË DHËNË ME KOORDINATAT NË SISTEMIN KOORDINATIV

Operacionet mbledhje të vektorëve, zbritje të vektorëve, shumëzim të vektorit me numër si edhe relacionet për barazi dhe kolinearitet të vektorëve tani më i ke të njohur nga pikëpamja gjeometrike. Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre atëherë operacionet dhe relacionet ndërmjet tyre kryhen në bazë të këtyre teoremave:

Teorema 1. Vektorët $\vec{a} = (x_1, y_1)$ dhe $\vec{b} = (x_2, y_2)$ janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse i kanë koordinatat përkatëse të barabarta, d.m.th. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

Teorema 2. Koordinatat e shumës dhe ndryshimit të vektorëve $\vec{a} = (x_1, y_1)$ dhe $\vec{b} = (x_2, y_2)$ janë të barabartë me shumën ose ndryshimin e koordinatave përkatëse të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, d.m.th. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j}$
 $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{j}$

➤ **Shembulli 1.** T'i caktojmë koordinatat e shumës dhe ndryshimit të vektorëve $\vec{a} = (5, -3)$ dhe $\vec{b} = (-2, -4)$.

Zgjidhje. Duke zëvendësuar koordinatat e vektorëve të dhënë në formulat për shumën dhe ndryshimin kemi:

$$\vec{a} + \vec{b} = (5-2) \vec{i} + (-3-4) \vec{j} = 3 \vec{i} - 7 \vec{j} \quad \text{d.m.th.} \quad \vec{c} = (3, -7);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (5-(-2)) \vec{i} + (-3-(-4)) \vec{j} = 7 \vec{i} + 1 \vec{j} \quad \text{d.m.th.} \quad \vec{c} = (7, 1) \quad \blacksquare$$

Teorema 3. Vektori $\vec{a} = (x_1, y_1)$ shumëzohet me numrin k nëse çdo koordinatë e vektorit shumëzohet me numrin k , d.m.th.

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot (x_1, y_1) = (kx_1, ky_1) \quad \text{ose} \quad k \cdot (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) = kx_1 \vec{i} + ky_1 \vec{j}$$

➤ **Shembulli 2.** Është dhënë vektori $\vec{a} = 8 \vec{i} - 3 \vec{j}$. T'i caktojmë koordinatat e vektorit $\vec{b} = 5 \vec{a}$.

Zgjidhje. Në bazë të teoremës 4 të shprehur fitojmë:

$$\vec{b} = 5 \vec{a} = 5(8 \vec{i} - 3 \vec{j}) = 40 \vec{i} - 15 \vec{j} \quad \text{ose} \quad \vec{b} = (40, -15). \quad \blacksquare$$

DETYRA

- Janë dhënë vektorët: $\vec{a} = 5 \vec{i} - 9 \vec{j}$; $\vec{b} = -7 \vec{i}$; $\vec{c} = \frac{2}{3} \vec{j}$. Provo a vlejné barasitë:
a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Janë dhënë vektorët: $\vec{a} = -4 \vec{i} + 5 \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{c} = 0 \vec{i} - 5 \vec{j}$. Cakto vektorin $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
- Caktoji numrat m dhe n , nëse dihet se:
a) $8 \vec{i} + 10 \vec{j} = m \vec{i} + (2n + m) \vec{j}$; b) $m \vec{i} - n \vec{j} = (n+2) \vec{i} + (2m-1) \vec{j}$.
- Janë dhënë vektorët: $\vec{a} = (8, -3)$ dhe $\vec{b} = (1, -8)$. Caktoji koordinatat e vektorit $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ dhe $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
- Caktoji koordinatat e vektorit $\vec{a}$, nëse $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ dhe $\vec{b} = (17, -2)$.
- Janë dhënë vektorët $\vec{a} = (3, -4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$ dhe $\vec{c} = (5, 3)$. Caktoji koordinatat e vektorëve:
a) $3 \vec{a} + 2 \vec{b} - 5 \vec{c}$; b) $2 \vec{a} - 3 \vec{b} + \vec{c}$.
- Janë dhënë vektorët $\vec{a} = (3, -2)$ dhe $\vec{b} = (-4, 6)$. Caktoji vektorët α dhe β ashtu që $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + 10 \vec{j} = \vec{0}$.
- Caktoji koordinatat e vektorit, i cili është i barabartë me prodhimin e numrit 6 dhe të vektorit $\vec{a} = (2, -\frac{1}{3})$.

4.1.3. LARGËSIA NDËRMJET DY PIKAVE

Në rrafsh me sistem koordinativ të zgjedhur $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le të jenë dhënë pikat $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$ (fig.1). Dëshirojmë ta caktojmë largësinë d ndërmjet pikave A dhe B . Pasi largësia d është e barabartë me gjatësinë (modulin) e vektorit $\overrightarrow{AB}$,

$$d = |\overrightarrow{AB}|$$

duhet në realitet ta caktojmë gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB} = (x, y)$.

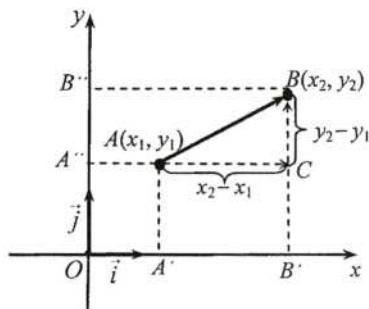


fig.1

Prej trekëndëshit kënddrejtë ACB (fig.1), në pajtim me teoremën e Pitagorës, kemi:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 \quad (1)$$

Pasi

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A'B'}| = |x_2 - x_1| \text{ dhe } |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A''B''}| = |y_2 - y_1|,$$

me zëvendësimin në (1) fitojmë:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Domethënë, për caktimin e largësisë d ndërmjet dy pikave e fitojmë formulën të cilën e ke të njohur nga viti i parë:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

Veçanërisht, për largësinë d prej fillimit të koordinatave O deri te çfarëdo pikë $M(x, y)$, e cila është e barabartë me gjatësinë e rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$ të pikës M , kemi:

$$d = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

➤ **Shembulli 1.** Është dhënë vektori $\overrightarrow{AB} [A(3,5), B(-1,2)]$. T'i caktojmë koordinatat e vektorit, kurse pastaj ta njehsojmë gjatësinë e tij.

Zgjidhje. Pasi $x_1 = 3, y_1 = 5; x_2 = -1, y_2 = 2$, fitojmë

$$\overrightarrow{AB} = (-1-3)\vec{i} + (2-5)\vec{j} = -4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ d.m.th. } \overrightarrow{AB} = (-4, -3),$$

kurse gjatësia e vektorit është: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$.

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojmë largësinë ndërmjet pikave $A(5,6)$ dhe $B(9,3)$.

Zgjidhje. Me zbatim të drejtpërdrejt të formulës për largësinë fitojmë:

$$d = \sqrt{(9-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

➤ **Shembulli 3.** Të provojmë se trekëndëshi me kulmet $A(0,0)$, $B(-2,-2)$ dhe $C(-1,1)$ a është drejtkëndësh?

Zgjidhje. Së pari do t'i caktojmë gjatësitë e brinjëve, pra nëse për numrat e fituar vlen teorema e Pitagorës, atëherë trekëndëshi ABC është kënddrejtë. Kemi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1+2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10},$$

Pasi $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8+2=10 = \overline{BC}^2$, trekëndëshi është kënddrejtë. ■

➤ **Shembulli 4.** Në boshtin x ta caktojmë pikën e cila është në largësi 13 njësi prej pikës $M(-2,5)$.

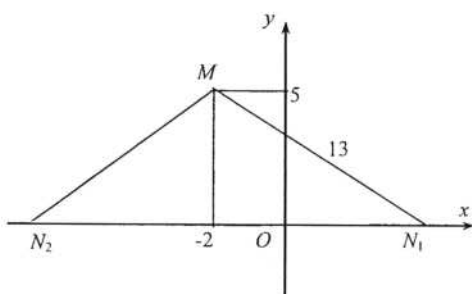


fig.2

Zgjidhje. Pikat e boshtit x kanë ordinatë zero, pra

pika e kërkuar është $N(x,0)$ ku x duhet të caktohet (fig. 2).

Pasi sipas kushtit $\overline{MN} = 13$, kemi:

$$13 = \sqrt{(x+2)^2 + (0-5)^2} \Leftrightarrow 169 = x^2 + 4x + 4 + 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0$$

zgjidhjet e të cilave janë $x_1 = 10$ dhe $x_2 = -14$. Domethënë

ka dy pika që e kënaqin kushtin e detyrës $N_1(10,0)$ dhe

$N_2(-14,0)$. ■

➤ **Shembulli 5.** Ta caktojmë qendrën $S(x,y)$ të vijës rrethore të jashtëshkruar rreth trekëndëshit me kulme $A(-2,-2)$, $B(5,-1)$, $C(-3,5)$, kurse pastaj ta caktojmë rrezen e vijës rrethore.

Zgjidhje. Qendra $S(x,y)$ e vijës rrethore të jashtëshkruar rreth trekëndëshit është njëllor e larguar prej kulmeve të trekëndëshit, d.m.th. $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = R$ (R – rrezja e vijës rrethore). Pasi

$$\overline{SA} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}; \overline{SB} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}; \overline{SC} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2},$$

për caktimin e koordinatave x dhe y e fitojmë sistemin e barazimeve:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1} \\ \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 \\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y = 9 \\ -8x + 6y = 4 \end{cases}$$

zgjidhja e të cilit është $x = 1$, $y = 2$, pra $S(1,2)$. Rrezen do ta caktojmë si largësi prej qendrës S deri te

cilido kulm i ΔABC , d.m.th. $R = \overline{SA} = \sqrt{(1+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. ■

- 1) Cakto largësinë ndërmjet pikave:
 - a) $A_1(4,8)$ dhe $A_2(7,4)$; b) $M(2,-1)$ dhe $N(-1,4)$; c) $P(0,3)$ dhe $Q(4,0)$.
- 2) Caktoji gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit ABC kulmet e të cilit janë në pikat $A(6,3)$, $B(-2,9)$, $C(3,-3)$.
- 3) Prej të gjitha pikave të cilat prej pikës $A(10,6)$ janë në largësi 5 njësi, caktoje atë ordinata e së cilës është 2..
- 4) Pika $M \in y$ -boshti. Caktoji koordinatat e pikës M nëse është njëlloj e larguar prej pikave $A(5, -1)$ dhe $C(-3,5)$.
- 5) Vërteto se nuk ekziston pikë që është njëlloj e larguar prej pikave $A(-5,5)$, $B(2,5)$ dhe $C(7,5)$. Çka mund të thuhet për pozitën reciproke të atyre pikave?
- 6) Janë dhënë koordinatat e dy kulmeve të katrorit $ABCD$; $A(-3,2)$, $B(-6,2)$. Caktoji koordinatat e dy kulmeve tjerë.
- 7) Caktoji gjatësitë e brinjëve dhe gjatësitë e diagonaleve të katërkëndëshit kulmet e të cilit janë: $A(-5,0)$, $B(-7,2)$, $C(7,3)$, $D(5,-7)$.
- 8) Provo se katërkëndëshi kulmet e të cilit janë pikat:
 - a) $A(1,3)$, $B(2,1)$, $C(5,2)$, $D(4,4)$;
 - b) $A(1,1)$, $B(6,1)$, $C(5,4)$, $D(2,4)$;
 - c) $A(a,b)$, $B(b,a)$, $C(-a,b)$, $D(b,-a)$ është paralelogram.

4.1.4. Ndarja e segmentit në raport të dhënë

Prej gjeometrisë e ke të njohur se pika M e cila shtrihet në segmentin AB , e ndan atë në njëlloj raporti $k = m : n$ ($k \neq -1$), përkatësisht vlen barasia:

$$\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = k.$$

Poashtu nëse pika M është ndërmjet pikave A dhe B , ndarja është e **brendshme**, por nëse pika M është në vazhdim të segmentit AB ndarja është e **jashtme** (fig.1).

Këtu e parashtrijmë këtë detyrë: janë dhënë koordinatat e pikave të skajshme të segmentit $AB[A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)]$, t'i caktojmë koordinatat e pikës $M(x, y) \in AB$ e cila e ndan segmentin AB në raport të dhënë $k = m : n$.

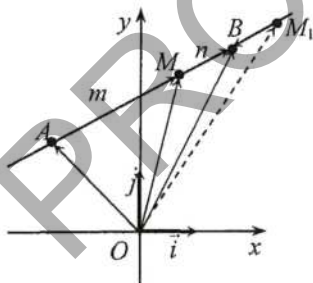


fig.1

Do t'i caktojmë koordinatat x dhe y të pikës M prej kushtit

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB} \quad (k \neq -1) \quad (1)$$

Për këtë qëllim, i shprehim vektorët $\overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{MB}$ me rreze vektorët e pikave A, M dhe B . Prej fig. 1 kemi:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \quad (2)$$

Prej barasive (1) dhe (2) fitojmë

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + k \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB} \text{ prej ku}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + k} \quad (3)$$

Nëse në (3) rreze vektorët i zëvendësojmë me koordinatat e tyre:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

në bazë të teoremave për operacione me vektorë, fitojmë:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}} \quad (4)$$

Nëse pika M është **mesi** i segmentit AB , atëherë $k=1$, pra prej (4) fitojmë

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \quad (5)$$

Formulën (4) e fitojmë duke marrë se M është pika e brendshme për segmentin AB . Pasi në këtë rast vektorët $\overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{MB}$ janë me kahe të njëjtë prej (1) vijon se $k > 0$. Nëse tani M_1 është në vazhdim të segmentit AB , atëherë $\overrightarrow{AM_1}$ dhe $\overrightarrow{M_1B}$ janë me kahe të kundërt, pra $k < 0$.

➤ **Shembulli 1.** T'i caktojmë koordinatat e pikës M e cila segmentin $AB[(1,3), B(4,6)]$ e ndan në raport 2:3.

Zgjidhje. Këtu është $k = \frac{2}{3}$, pra duke e zbatuar formulën (4) fitojmë

$$x = \frac{1 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{11}{5}, \quad y = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{13}{5}. \text{ Domethënë } M\left(\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right).$$

➤ **Shembulli 2.** T'i caktojmë koordinatat e pikës M e cila segmentin $AB[A(-3,1), B(2,5)]$ e ndan në raport $k = -3$.

Zgjidhje. Pasi $k = -3 < 0$, ndarja është e jashtme. Prej formulës (4) kemi

$$x = \frac{-3 - 3 \cdot 2}{1 - 3} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}, \quad y = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = \frac{-14}{-2} = 7. \text{ Domethënë, } M\left(\frac{9}{2}, 7\right).$$

➤ **Shembulli 3.** Pika $M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$, e ndan segmentin AB në raport 1:3. Ta caktojmë gjatësinë e segmentit AB , nëse $A(2,3)$.

Zgjidhje. Prej kushtit të detyrës kemi $k = \frac{1}{3}$. Duhet t'i gjejmë koordinatat e pikës B . Kemi:

$$\frac{1}{4} = \frac{2 + \frac{1}{3} \cdot x_2}{1 + \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{6 + x_2}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_2 = -5; \quad \frac{5}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3} \cdot y_2}{1 + \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{9 + y_2}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y_2 = 1, \text{ d.m.th. } B(-5,1).$$

Gjatësia e segmentit AB do të jetë $\overline{AB} = \sqrt{(-5-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$.

► **Shembulli 4.** Janë dhënë tre kulme të paralelogramit $ABCD$: $A(4,-1)$, $B(2,3)$ dhe $C(0,5)$. Ta caktojmë kulmin e katërt D .

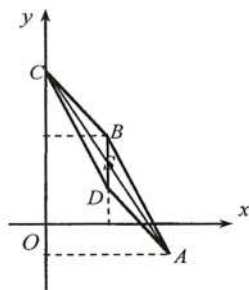


fig.2

Zgjidhje. Kulmi D le të jetë me koordinata $D(x_4, y_4)$. Së pari do ta caktojmë mesin $M(x_s, y_s)$ të diagonales AC (fig.2): $x_s = \frac{4+0}{2} = 2$ dhe

$$y_s = \frac{-1+5}{2} = 2. \text{ Domethënë } S(2,2).$$

Por, pika M është pika e mesme e diagonales BD (pse?), pra vlen:

$$2 = \frac{2+x_4}{2} \Leftrightarrow x_4 = 2, \quad 2 = \frac{3+y_4}{2} \Leftrightarrow y_4 = 1. \text{ Domethënë } D(2,1). \blacksquare$$

► **Shembulli 5.** Të vërtetojmë se koordinatat e pikës së rëndimit $T(x_t, y_t)$ të $\triangle ABC$ $[A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)]$, caktohen me formulat:

$$x_t = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_t = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Zgjidhje. Koordinatat e mesit $S(x_s, y_s)$ të brinjës BC janë:

$$x_s = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_s = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

E kemi të njohur se pika e rëndimit $T(x_t, y_t)$ e ndan segmentin e rëndimit AS në raport $2:1$, d.m.th. $AT:TS = 2:1$, pra në pajtim me formulat (4) fitojmë:

$$x_t = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_t = \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

► **Shembulli 6.** Janë dhënë dy kulme të trekëndëshit $A(2,3)$ dhe $B(4,-5)$ dhe koordinatat e pikës së rëndimit $T(1,-3)$. Ta caktojmë kulmin e tretë të trekëndëshit.

Zgjidhje. Kulmi i tretë le të jetë $C(x_3, y_3)$. Duke zëvendësuar në formulat për pikën e rëndimit fitojmë: $1 = \frac{2+4+x_3}{3}$, $x_3 = -3$ dhe $-3 = \frac{3-5+y_3}{3}$, $y_3 = -7$. Domethënë $C(-3,-7)$. ■

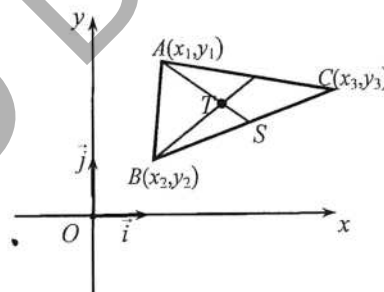


fig.3

DETYRA

- Segmenti $AB[A(-2,3), B(4,6)]$ është ndarë me pikën M në raport $5:1$. Caktoji koordinatat e pikëndarjes.
- Caktoji koordinatat e pikës C e cila e përgjysmon segmentin AB , nëse koordinatat e A dhe B janë : a) $A(1,3)$, $B(5,1)$; b) $A(-3,0)$, $B(1,-3)$.
- Caktoji koordinatat e pikës M e cila segmentin e dhënë AB e ndan në raport k :

$$\text{a) } A(1,7), B(6,-3), k = \frac{2}{3}; \quad \text{b) } A(2,3), B(-5,2), k = -\frac{1}{2}.$$

4. Njehso gjatësitë e vijave të rëndimit të trekëndëshit ABC, nëse $A(2,3)$, $B(4,8)$, $C(0,5)$.
5. Janë dhënë koordinatat e kulmeve të trekëndëshit ABC [$A(1,2)$, $B(-5,-3)$, $C(7,-4)$]. Caktoji koordinatat e mesit të vijës së rëndimit AA_1 .
6. Është dhënë paralelogrami me kulme $A(2,4)$, $B(5,7)$ dhe $C(12,8)$. Caktoji koordinatat e kulmit të katër D.
7. Janë dhënë dy kulme të paralelogramit $A(-4,2)$, $B(0,6)$ dhe pikëprerja e diagonaleve $O(2,4)$. Caktoji dy kulmet tjera të paralelogramit.
8. Caktoji koordinatat e pikës së rëndimit dhe largësinë e saj prej fillimit të koordinatave, të trekëndëshit me kulme $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(4,1)$.
9. Segmenti me pika të skajshme $M_1(-6,-3)$ dhe $M_2(6,6)$ është ndarë në tri pjesë të barabarta. Caktoji koordinatat e pikëndarjeve dhe gjatësinë e çdo segmenti.
10. Pika $A(9,7)$ është një kulm i katrorit në të cilin diagonalet priten në fillimin e koordinatave. Caktoji koordinatat e tri kulmeve tjera, si edhe gjatësinë e diagonales së katrorit.
11. Pikat $M_1(2,-1)$, $M_2(-1,4)$ dhe $M_3(-2,2)$ janë meset e brinjëve të trekëndëshit ABC. Caktoji koordinatat e kulmeve të tij.
12. Pika e rëndimit T e trekëndëshit ABC është në boshtin x, dy kulme të tij janë $A(2,-3)$, $B(-5,1)$, kurse kulmi i tretë C është në boshtin y. Caktoji koordinatat e T dhe C.
13. Vërteto se vija e mesme e trapezit me kulme $A(-5,-2)$, $B(10,3)$, $C(2,5)$, $D(-1,4)$ është e barabartë me gjysmëshumën e brinjëve paralele.

DEKART, RENE (Rene Descartes) (1596-1650) – filozof dhe matematikan francez. Për Dekartin gjuhë më të qartë dhe më të saktë për tu shprehur për të vërtetat shkencore është gjuha e matematikës. Sa që edhe në filozofi është përpjekur të zbulojë ligjshmëri matematikore, çdo pyetje dhe problem ta sjellë në studim matematikor. Me vullnet dhe disiplinë, për atë të veçantë, përpiqet të fut rend, t'i bashkon të gjitha disiplinat matematikore, të jep përgjigje konkrete për të gjitha pyetjet. Por, prapëseprap, merita e tij më e madhe në matematikë është për vendosjen e lidhjes së ngushtë ndërmjet formave gjeometrike dhe formulave algjebrike. Përkatësisht, me përgjithësimin dhe bashkimin e metodës së koordinatave dhe simbolikës algjebrike të shkronjave në të cilat është bazuar gjeometria analitike. Dekarti i ka hapur dyert nga studimi i dukurive në hapësirën shumëdimensionale. Këtë metodë ai e ka përdorur në hapësirën dydimensionale, d.m.th. rrafshin, por zgjerimi i tij krijon një mjet të vërtetë për njohjen dhe paraqitjen e natyrës.

4.2. DREJTËZA NË RRAFSH

Për funksionin linear, katror, eksponencial, logaritmik dhe trigonometrik e zgjidhim këtë detyrë: në bazë të barazimit me të cilën është dhënë funksioni i shqyrtojmë vetitë e funksionit dhe e konstruktojmë grafikun e tij (paraqitja gjeometrike në rrafsh).

Tani e parashtrojmë detyrën e kundërt: *ta formojmë barazimin e vijës së dhënë (drejtëza ose lakorja), në bazë të një numri të kushteve (vetive) për atë lakore.*

Pasi koordinatat e çfarëdo pike të vijës e kënaqin barazimin e saj, detyra e parashtuar sillet në formimin e barazimit të atillë ndërmjet ndryshoreve x dhe y që do t'i kënaqin koordinatat x dhe y të çdo pike nga vija e dhënë, por jo edhe koordinatat e pikave që nuk shtrihen në të.

Në bazë të asaj që theksuam, barazimin e drejtëzës së dhënë e përcaktojmë ashtu që bëjmë barazim të ciliën e kënaqin vetëm koordinatat e pikave të cilat i takojnë asaj drejtëze.

Për shembull, me barazimin $y = x$ është dhënë bashkësia e pikave me veti të përbashkët: *abshisa dhe ordinata ndërmjet veti janë të barabarta.* Ajo bashkësia është drejtëza e cila është simetrale e kuadrantit të parë dhe të tretë. Asnjë pikë tjetër që nuk e ka atë veti nuk i takon asaj bashkësie.

Gjithashtu, me barazimin $y = x^2$ është përcaktuar bashkësia e pikave prej rrafshit të cilat kanë veti të përbashkët: *ordinata e çdo pike është e barabartë me katrorin e abshisës së asaj pike.* Pikat me këtë veti shtrihen në lakoren – *parabollë* me kulm në fillimin e koordinatave, dhe asnjë pikë që nuk është në të nuk e plotëson kushtin e dhënë.

Ndërkaq, një drejtëz të njëjtë varësisht nga kushtet që e përcaktojnë pozitën e saj në raport me sistemin e dhënë kënddrejtë koordinativ mund ta paraqesim me barazime të ndryshme të drejtëzave.

Kushtet me ndihmën e të cilave është përcaktuar pozita e drejtëzës në sistemin kënddrejtë koordinativ i quajmë **parametra përcaktues**.

Këtu e kemi mu këtë detyrë për t'i përcaktuar llojet e ndryshme të barazimeve të drejtëzave varësisht prej parametrave të dhëna të përcaktuara.

4.2.1 FORMA EKSPLICITE DHE E PËRGJITHSHME E BARAZIMIT TË DREJTËZËS

1. Pozita e drejtëzës l le të jetë e përcaktuar me:

1° segmenti n që drejtëza e prenë në boshtin Oy , d.m.th. me pikën $B(0, n)$, dhe

2° këndi α që drejtëza e formon me kahen pozitive të boshtit Ox (fig. 1).

Supozojmë se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, d.m.th. l nuk është paralele me boshtin Oy . Nëse $M(x, y)$ është çfarëdo pikë prej drejtëzës l , atëherë prej trekëndëshit BNM kemi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - n}{x}, \text{ prej ku } y = x \operatorname{tg} \alpha + n.$$

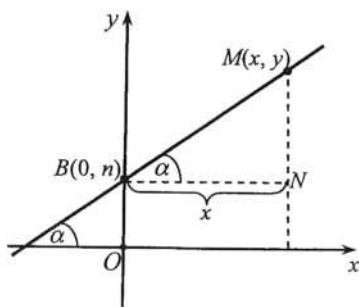


fig.1

Nëse vëndojmë $\text{tg } \alpha = k$, e fitojmë barazimin

$$y = kx + n \quad (1)$$

Domethënë, koordinatat x dhe y të çfarëdo pike $M(x, y)$ prej drejtëzës l që i plotëson kushtet 1° dhe 2° kënaqin barazimin prej formës (1), dhe ajo paraqet barazim të drejtëzës l , në të cilën paraqiten dy parametra përcaktues k dhe n .

Numrin $k = \text{tg } \alpha$ e quajmë **koeficienti i drejtimit** të drejtëzës l , ose **koeficienti këndor** për drejtëzën l .

Barazimi (1) paraqet **formën eksplicite** të barazimit të drejtëzës.

Nëse $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (l boshti y), koeficienti $k = \text{tg } \alpha$ nuk është përcaktuar, pra në këtë rast barazimi i

drejtëzës mund të paraqitet në formën eksplicite.

➤ **Shembulli 1.** Barazimi $y = x + 3$ paraqet barazim të drejtëzës me koeficient të drejtimit $k = 1$, d.m.th. $\text{tg } \alpha = 1$, prej ku vijon se $\alpha = 45^\circ$ është këndi që drejtëza e formon me boshtin x , por e prenë boshtin y në pikën $B(0, 3)$ ■

Varësisht prej vlerave të parametrave përcaktues k dhe n në barazimin $y = kx + n$, fitojmë disa drejtëza të veçanta.

- Nëse $k = 1$ dhe $n = 0$, barazimi (1) e fiton formën $y = x$, kurse ajo është simetralja e kuadrantit të parë dhe të tretë.
- Nëse $k = -1$ dhe $n = 0$, barazimi (1) e fiton formën $y = -x$, kurse ajo drejtëz është simetralja e kuadrantit të dytë dhe të katër.
- Nëse $k = 0$ dhe $n \neq 0$, barazimi (1) e fiton formën $y = n$, kurse ajo është drejtëza paralele me boshtin x .
- Nëse $k = 0$ dhe $n = 0$, barazimi (1) kalon në barazimin $y = 0$ i cili paraqet barazimin e boshtit të x .

➤ **Shembulli 2.** Të shkruajmë barazimin e drejtëzës e cila me boshtin x formon kënd $\alpha = 135^\circ$, kurse në pjesën pozitive të boshtit y prenë segment me gjatësi 3.

Zgjidhje. Sipas kushteve të detyrës kemi: $k = \text{tg } 135^\circ = \text{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\text{tg } 45^\circ = -1$, $n = 3$, pra barazimi i drejtëzës është: $y = -x + 3$ ■

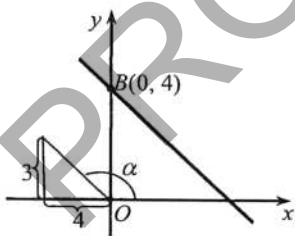


fig.2

➤ **Shembulli 3.** Të shkruajmë barazimin e drejtëzës nëse $k = -\frac{3}{4}$ dhe $n = 4$, kurse pastaj me ndihmën e koeficientëve përcaktues ta vizatojmë drejtëzën në sistemin koordinativ.

Zgjidhje. Pasi k dhe n janë dhënë, barazimi i drejtëzës është $y = -\frac{3}{4}x + 4$. Për paraqitjen e drejtëzës në sistemin koordinativ i bartim pikat $B(0, 4)$ dhe këndin α të cilin e konstruktojmë grafikisht sipas kushtit $k = \text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}$ (fig.2) ■

2. Tregojmë se në sistemin kënddrejtë koordinativ barazimi i çdo drejtëze është $y = kx + n$, i cili paraqet barazim linear sipas ndryshoreve x dhe y . Është e natyrshme tani ta parashtrojmë pyetjen: „Çdo barazim linear sipas ndryshoreve x dhe y a përcakton ndonjë drejtëz?”

Për tu përgjigjur në këtë pyetje, të shqyrtojmë një barazim linear në formën e përgjithshme sipas ndryshoreve x dhe y dhe të sqarojmë çka paraqet bashkësia e pikave me koordinata x dhe y të cilat e kënaqin atë barazim. Do të tregojmë se ajo bashkësi e pikave është drejtëz.

Barazimi i përgjithshëm linear sipas ndryshoreve x dhe y është barazimi

$$Ax + By + C = 0, \quad (2)$$

ku A, B dhe C janë çfarëdo numra realë, për çka A dhe B nuk janë njëkohësisht të barabartë me zero. Për vlera të ndryshme të koeficientëve A, B dhe C barazimi (2) paraqet formën e përgjithshme të barazimit të drejtëzës.

Me të vërtetë, le të jetë $B \neq 0$ dhe $A \neq 0$. Nëse barazimin (2) e zgjedhim sipas y fitojmë $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, prej ku nëse zëvendësojmë $-\frac{A}{B} = k$ dhe $-\frac{C}{B} = n$, e fitojmë barazimin

$$y = kx + n \quad (3)$$

që e paraqet formën eksplicite të barazimit të drejtëzës.

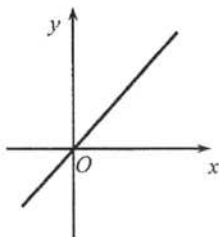


fig.3

Nëse $C = 0, B \neq 0$, barazimi (2) kalon në $Ax + By = 0$ përkatësisht $y = -\frac{A}{B}x$ (drejtëza që kalon nëpër fillimin e koordinatave) (fig. 3).

Nëse $B = 0$ dhe $A \neq 0$ atëherë barazimi (2) e fiton formën

$$Ax + C = 0.$$

Duke e zgjidhur këtë barazim sipas x fitojmë $x = -\frac{C}{A}$ ose nëse zëvendësojmë $-\frac{C}{A} = a$, fitojmë

$$x = a \quad (4)$$

Barazimin (4) e kënaqin koordinatat e çdo pike abshisa e të cilave është $x = a$, kurse ato janë pikat prej drejtëzës që është normale në boshtin x , përkatësisht paralele me boshtin y (fig.4). Vijnë,

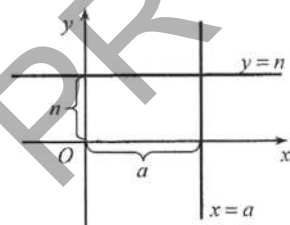


fig.4

barazimi (4) është barazimi i drejtëzës paralele me boshtin Oy .

Nëse $A = 0$ dhe $B \neq 0$, atëherë barazimi (2) e fiton formën $By + C = 0$, përkatësisht $y = -\frac{C}{B}$, ose nëse zëvendësojmë $-\frac{C}{B} = n$, e fitojmë barazimin

$$y = n \quad (5)$$

Vërejtëm se barazimi (5) është barazimi i drejtëzës paralele me boshtin Ox (fig.4)

Shqyrtoji për ushtrime këto raste: $A = C = 0$ dhe $B = C = 0$.

➤ **Shembulli 4.** Është dhënë drejtëza $p: 3x - 2y - 6 = 0$. T'i caktojmë pikëprerjet e asaj drejtëze me boshtet koordinative.

Zgjidhje. Pikëprerja A me boshtin x e ka ordnatën zero, kurse prerja me boshtin y është pika B abshisa e së cilës është zero, d.m.th. $A(x,0)$ dhe $B(0,y)$. Domethënë, $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, pra është $A(2,0)$ dhe $-2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3$, pra është $B(0,-3)$. ■

➤ **Shembulli 5.** Është dhënë drejtëza $l: 3x - 2y + 4 = 0$. Ta shkruajmë barazimin e saj në formën eksplicite.

Zgjidhje. Barazimin e drejtëzës $3x - 2y + 4 = 0$ e zgjidhim sipas ndryshores y , d.m.th.

$$3x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x + 4 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 2, \text{ ku } k = \frac{3}{2} \text{ dhe } n = 2. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 6.** Ta shkruajmë formën e përgjithshme të barazimit që kalon nëpër pikën $A(3,1)$, kurse në boshtin y prenë segment me gjatësi $n = 5$.

Zgjidhje. Do ta shkruajmë së pari drejtëzën e kërkuar në formën eksplicite $y = kx + n$ d.m.th. $l: y = kx + 5$. Pasi $A \in l$, koordinatat e A e kënaqin barazimin e l , dhe kemi $1 = 3k + 5 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$. Vijon, barazimi i kërkuar i drejtëzës l është $y = -\frac{4}{3}x + 5$ ose në formën e përgjithshme $4x + 3y - 15 = 0$ ■

DETYRA

- Shkruaje barazimin e drejtëzës, nëse është dhënë: a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $n = 2$; b) $\alpha = 120^\circ$, $n = -3$.
- Cakto koeficientin e drejtimit të drejtëzës $y = kx$, nëse dihet se pika $M(8,6)$ shtrihet në drejtëzën (d.m.th. drejtëza kalon nëpër pikën M).
- Cakto këndin që drejtëza a) $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$; b) $y = \frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$; c) $y = -3$; ç) $x = 5$, e formojnë me pjesën pozitive të boshtit x .
- Cilat prej pikave $A(2,-1)$, $B(4,2)$ dhe $C(6,4)$ shtrihen në drejtëzën $y = \frac{3}{2}x - 4$.
- Caktoji koordinatat e pikave të drejtëzës $y = \frac{3}{4}x + 6$ në të cilën ajo i prenë boshtet koordinative.
- Cakto koeficientin e drejtimit të drejtëzës $y = -\frac{k}{3}x + 2$, e cila kalon nëpër pikën $A(3,0)$.
- Cakto koeficientin e drejtimit dhe segmentin që drejtëza e prenë prej boshtit të ordnatës, nëse drejtëzat janë dhënë në formën e përgjithshme: a) $3x - y + 2 = 0$; b) $x + 5y + 20 = 0$; c) $-2x + \frac{1}{5}y - 7 = 0$
- Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër prerjen e drejtëzave $4x + 3y = 7$ dhe $3x + 2y = 5$, kurse koeficienti i drejtimit është i barabartë me koeficientin e drejtimit të drejtëzës $2x + y - 5 = 0$.
- Shkruaje barazimin e dy drejtëzave që kalojnë nëpër pikën $A(-4,-5)$, ashtu që njëra të jetë paralele me boshtin x , kurse tjetra me boshtin y .

10. Formo barazim të bashkësive të pikave që janë njëloj të larguara prej fillimit të koordinatave dhe prej pikës $A(-5,3)$.
11. Cakto bashkësinë e pikave që janë njëloj të larguara prej pikave $A(-5,3)$ dhe $B(1,2)$.
12. Në barazimin e drejtëzës $kx + 3y - 2 = 0$, cakto k ashtu që në boshtin y të jetë 4, kurse pastaj cakto këndin që drejtëza e ndërton me kahen pozitive të boshtit x .
13. Cakto këndin që e formon drejtëza me kahen pozitive të boshtit x :
- a) $2x - y - 3 = 0$; b) $x + 3y = 12$; c) $x\sqrt{3} + y = 4$.

4.2.2. BARAZIMI I DREJTËZËS QË KALON NËPËR NJË PIKË. BARAZIMI I DREJTËZËS QË KALON NËPËR DY PIKA.

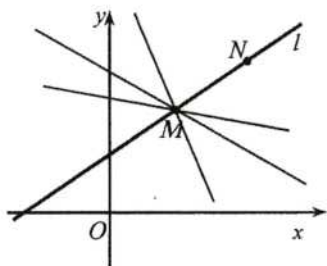


fig.1

1. Nga planimetria e ke të njohur se nëpër një pikë të dhënë $M(x_1, y_1)$ në rrafsh kalojnë pafund shumë drejtëza, të cilat formojnë bashkësi drejtëzash (tufë drejtëzash), me qendër në pikën $M(x_1, y_1)$ (fig.1).

E parashtrojmë tani këtë detyrë: të caktojmë një drejtëz prej bashkësisë së drejtëzave nëpër pikën M .

Për këtë qëllim mjafton të zgjedhim edhe një pikë çfarëdo $N(x, y)$ e ndryshme prej qendrës të tufës $M(x_1, y_1)$. Me pikat M dhe N është përcaktuar një drejtëz e vetme prej tufës. Ta caktojmë barazimin e saj (fig. 2).

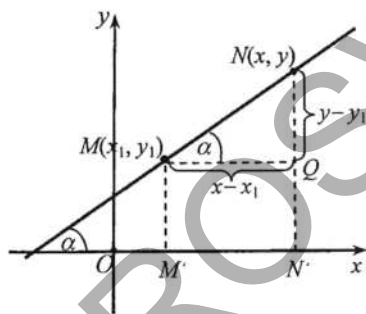


fig.2

Prej trekëndëshit kënddrejtë QMN me kateta $\overline{MQ} = x - x_1$, $\overline{NQ} = y - y_1$ dhe kënd $\alpha = \angle QMN$ fitojmë:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \text{ prej ku me zëvendësimin } \operatorname{tg} \alpha = k \text{ e fitojmë}$$

barazimin

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

(1)

Barazimi (1) paraqet barazimin e çfarëdo drejtëze e cila kalon nëpër pikën $M(x_1, y_1)$ kurse e ka koeficientin e drejtimit të barabartë me k .

Për vlera të ndryshme të k fitojmë drejtëza të ndryshme prej tufës, përkatësisht të gjitha drejtëzat që kalojnë nëpër pikën M , përveç

drejtëzës që është paralele me boshtin y . Prandaj, barazimin (1) mund ta marrim për barazim të bashkësisë së drejtëzave të cilat kalojnë nëpër pikën $M(x_1, y_1)$. Nëse, përveç pikës M është dhënë edhe vlera e k , atëherë barazimi (1) përcakton drejtëz të vetme. Ai është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër një pikë.

➤ **Shembulli 1.** Ta shkruajmë barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(2,3)$ dhe me kahen pozitive të boshtit x formon kënd $\alpha = 60^\circ$.

Zgjidhje. Prej kushtit $\alpha=60^\circ$ gjejmë $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, dhe me zbatimin e drejtpërdrejt të formulës (1) fitojmë: $y - 3 = \sqrt{3}(x - 2)$ d.m.th. $\sqrt{3}x - y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$ ■

➤ **Shembulli 2.** Si është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(2,-3)$, kurse me kahun pozitive të boshtit x formon kënd të njëjtë sikurse drejtëza $x + 9y - 11 = 0$?

Zgjidhje. Koeficienti i drejtimit të drejtëzës së dhënë është $-\frac{1}{9}$. Pasi drejtëza që kalon nëpër pikën $M(2,-3)$ duhet të formon kënd të njëjtë me boshtin x , ajo do të ketë koeficient të drejtimit të njëjtë $k = -\frac{1}{9}$, pra në pajtim me (1) barazimi i saj do të jetë: $y + 3 = -\frac{1}{9}(x - 2)$ ose $x + 9y + 25 = 0$ ■

2. Në rrafshin koordinativ le të jenë dhënë dy pika $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$, ku $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ (fig.3). Me pikat M_1 dhe M_2 është përcaktuar drejtëz e vetme. Ta formojmë barazimin e saj.

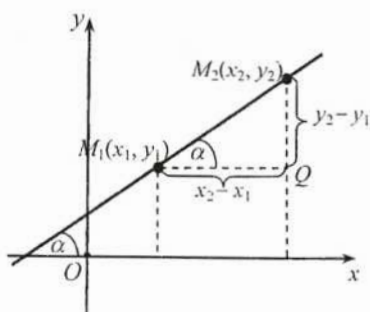


fig.3

Për këtë qëllim, së pari do ta shkruajmë barazimin e bashkësisë së drejtëzave nëpër njëren prej dy pikave të dhëna, për shembull nëpër $M_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (1)$$

Drejtëza e kërkuar është ajo drejtëzë prej tufës që kalon edhe nëpër pikën $M_2(x_2, y_2)$, prandaj koeficientin k do ta përcaktojmë ashtu që koordinatat x_2 dhe y_2 të pikës M_2 ta kënaqin barazimin e drejtëzës (1), d.m.th.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \text{ prej ku } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Nëse k e zëvendësojmë në (1) fitojmë barazimin e kërkuar:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (2)$$

Domethënë, barazimi (2) është **barazimi i drejtëzës i përcaktuar me dy pika**.

Përpiku, sipas fig. 2, ta caktosh k në tjetër mënyrë.

➤ **Shembulli 3.** Të shkruajmë barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $M_1(-2,1)$ dhe $M_2(3,3)$.

Zgjidhje. Me zëvendësimin e koordinatave të pikave M_1 dhe M_2 në (2) fitojmë:

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{3 + 2}(x + 2) \text{ d.m.th. } y - 1 = \frac{2}{5}(x + 2), \text{ ose në formën e përgjithshme } 2x - 5y + 9 = 0. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Janë dhënë kulmet e trekëndëshit $A(2,3)$, $B(-4,1)$ dhe $C(2,-3)$. Ta shkruajmë barazimin e: a) brinjës AB b) vijës së rëndimit BB_1 .

Zgjidhje. a) Barazimi i brinjës AB do të jetë: $y - 3 = \frac{1-3}{-4-2}(x-2)$ d.m.th. $x - 3y + 7 = 0$.

b) Mesi i brinjës AC është pika $B_1 \left(\frac{2+2}{2}, \frac{3-3}{2} \right)$ d.m.th. $B_1(2,0)$, pra vija e rëndimit BB_1 do të jetë $y - 0 = \frac{1-0}{-4-2}(x-2)$ d.m.th. $x + 6y - 2 = 0$. ■

► **Shembulli 5.** Kulmet e trekëndëshit ABC janë $A(-1,-3)$, $B(3,3)$, $C(7,5)$. Ta shkruajmë barazimin e drejtëzës AT ku T është pika e rëndimit të ΔABC .

Zgjidhje. Pika e rëndimit është $T\left(\frac{-1+3+7}{3}, \frac{-3+3+5}{3}\right)$ d.m.th. $T\left(3, \frac{5}{3}\right)$, pra drejtëza AT do të jetë: $y - \frac{5}{3} = \frac{-3-\frac{5}{3}}{-1-\frac{5}{3}}(x-3)$ d.m.th. $7x - 6y - 11 = 0$. ■

► **Shembulli 6.** Janë dhënë meset e brinjëve të ΔABC : $A_1(2,1)$, $B_1(5,3)$ dhe $C_1(3,-4)$. T'i caktojmë barazimet e brinjëve të ΔABC .

Zgjidhje. Kulmet e ΔABC le t'i kenë koordinatat $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dhe $C(x_3, y_3)$. Pasi A_1 , B_1 , C_1 janë meset e brinjëve BC, AC dhe AB përkatësisht, kemi:

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 2, \frac{x_1 + x_3}{2} = 5, \frac{x_1 + x_2}{2} = 3, \frac{y_2 + y_3}{2} = 1, \frac{y_1 + y_3}{2} = 3, \frac{y_1 + y_2}{2} = -4.$$

Prej këtu, për caktimin e koordinatave të kulmeve, fitojmë dy sisteme të barazimeve lineare me tre të panjohura:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_3 = 10 \text{ dhe} \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \begin{cases} y_1 + y_2 = -8 \\ y_1 + y_3 = 6 \\ y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \text{ zgjidhjet e të cilëve janë } x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 4,$$

$$y_1 = -2, y_2 = -6, y_3 = 8$$

pra kulmet e ΔABC do të jenë $A(6,-2)$, $B(0,-6)$, $C(4,8)$. Tani mund t'i formojmë barazimet e brinjëve sipas formulës (2) për barazimin e drejtëzës nëpër dy pika (shkruaje vet). ■

DETYRA

- Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën e dhënë M, kurse me kahen pozitive të boshtit x formon kënd α :
a) $M(7,-5)$, $\alpha = 135^\circ$; b) $M(-5,3)$, $\alpha = 45^\circ$; c) $M(3,1)$, $\alpha = 60^\circ$.
- Si është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(2,2)$ dhe me kahet pozitive të boshteve koordinative kufizon trekëndësh me syprinë 9 katror njësi?
- Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(7,2)$, ashtu që segmenti të cilin drejtëza e prenë me pjesën pozitive të boshtit x , qëndron si 5 : 3 ndaj ordinatës së pikës M.

4. Shkruaje barazimin e drejtëzës ku koeficienti i drejtimit është 4, kurse segmenti në boshtin x është 5.
5. Si është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikat M_1 dhe M_2 , nëse është: a) $M_1(-1,1)$, $M_2(2,4)$; b) $M_1(2,-1)$, $M_2(-2,3)$; c) $M_1(1,0)$, $M_2(4,2)$?
6. Janë dhënë kulmet e trekëndëshit ABC [$A(2,3)$, $B(4,8)$, $C(3,-8)$]. Caktoji barazimet e :
a) brinjëve; b) vijave të rëndimit (medianeve).
7. Si është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën e përbashkët të drejtëzave $2x+3y-5=0$ dhe $x-2y-6=0$ dhe kalon nëpër pikën $M(1,2)$.
8. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $M_1(-1,2)$ dhe $M_2(2,3)$, kurse pastaj cakto koordinatat e pikëprerjeve të drejtëzës së fituar me boshtet e koordinatave.
9. Janë të njohura tri kulme të paralelogramit $A(1,-3)$, $C(-3,5)$, $D(-5,3)$. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër kulmin B dhe nëpër mesin e segmentit të përcaktuar me pikat $M(-8,4)$ dhe $N(10,-16)$.
10. Nëpër pikën $M(4,6)$ tërhiq drejtëz ashtu që segemtni i kufizuar ndërmjet boshteve të koordinatave është përgjysmuar me pikën M .
11. Provo pikat e poshtëpërmendura a shtrihen në një drejtëz: a) $A(2,2)$, $B(5,3)$ dhe $C(1,0)$; b) $A(1,1)$, $B(2,6)$, $C(-1,-9)$.
12. Për cilat vlera të parametrave p dhe q drejtëza me barazimin

$$(p+2q-3)x + (2p-q+1)y + 6p+9=0$$
është paralele me boshtin x , kurse në boshtin y prenë segment -3 ?

4.2.3 FORMA SEGMENTALE E BARAZIMIT TË DREJTËZËS

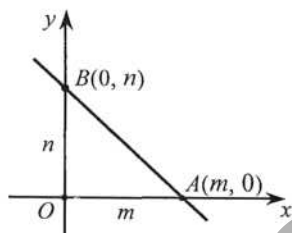


fig.1

Drejtëza e dhënë le t'i prenë të dy boshtet koordinative dhe nuk kalon nëpër fillimin e koordinatave (fig. 1), dhe pikëprerjet me boshtet Ox dhe Oy le të jenë $A(m, 0)$ dhe $B(0, n)$ përkatësisht, ku $m \neq 0$ dhe $n \neq 0$. Me pikat A dhe B është përcaktuar drejtëza AB , barazimi i së cilës, sipas formulës (2) prej t.4.2.2, është:

$$y - 0 = \frac{n - 0}{0 - m}(x - m) \quad \text{ose} \quad y = -\frac{n}{m}(x - m).$$

Pas rregullimit, fitojmë $nx + my = mn$, por pas pjesëtimit me mn fitojmë

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1} \quad (1)$$

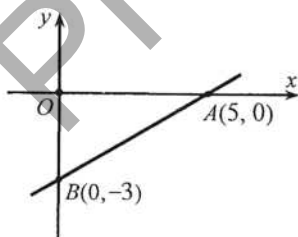


fig.2

Barazimi i drejtëzës është shkruar në formën (1) e quajmë **formë segmentale** të barazimit të drejtëzës, pasi në të figurojnë segmentet m dhe n që drejtëza i prenë me boshtet koordinative.

➤ **Shembulli 1.** Të formojmë barazim të drejtëzës që kalon nëpër pikat $A(5,0)$ dhe $B(0,-3)$, kurse pastaj ta konstruktojmë të njëjtën.

Zgjidhje. Pikat $A(5,0)$ dhe $B(0,-3)$ janë pikat prej boshteve koordinative dhe po ashtu $m = 5$, $n = -3$. Me zëvendësimin e drejtpërdrejt në formulën (1) e fitojmë barazimin $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$, që është barazimi i drejtëzës nëpër pikat A dhe B në formën segmentale.

Konstruksioni i drejtëzës është i qartë (fig. 2). ■

Barazimin e drejtëzës në formën e përgjithshme $Ax + By + C = 0$ ku $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, mundemi gjithmonë ta sjellim në formën segmentale me këto transformime:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -C \Leftrightarrow \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1, \text{ prej ku } m = -\frac{C}{A}, n = -\frac{C}{B},$$

dhe anasjelltas, formën segmentale të barazimit të drejtëzës (1) ta transformojmë në formën e përgjithshme.

➤ **Shembulli 2.** Është dhënë drejtëza $2x - 3y + 5 = 0$. Ta transformojmë drejtëzën në formën segmentale dhe t'i caktojmë segmentet e boshteve koordinative.

Zgjidhje. Kemi: $2x - 3y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = -5 \Leftrightarrow \frac{2x}{-5} - \frac{3y}{-5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{-5}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1.$

Domethënë $m = -\frac{5}{2}$, $n = \frac{5}{3}$. ■

➤ **Shembulli 3.** Ta sjellim në formën segmentale barazimin e drejtëzës $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Zgjidhje. Kemi $y = \frac{2}{3}x + 2 \Leftrightarrow 3y = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - 3y = -6$, prej ku $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$. ■

➤ **Shembulli 4.** Në barazimin e drejtëzës $mx + (m + 1)y - 8 = 0$, ta caktojmë parametrin m , ashtu që segmenti në boshtin x të jetë dy herë më i madh se segmenti në boshtin y .

Zgjidhje. Ta shkruajmë barazimin e drejtëzës së dhënë në formën segmentale:

$$mx + (m + 1)y - 8 = 0 \Leftrightarrow mx + (m + 1)y = 8 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{8}{m}} + \frac{y}{\frac{8}{m+1}} = 1. \text{ Në pajtim me kushtin e detyrës fitojmë}$$

$$\frac{8}{m} = 2 \frac{8}{m+1} \Leftrightarrow m + 1 = 2m, \text{ prej ku } m = 1, \text{ pra barazimi i drejtëzës në formën segmentale do të jetë}$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 5.** Në barazimin e drejtëzës $3x + ky - 12 = 0$, ta caktojmë k ashtu që gjatësia e segmentit që drejtëza e prenë ndërmjet boshteve koordinative është 5, kurse pastaj ta shkruajmë barazimin e drejtëzës.

Zgjidhje. Së pari barazimin e drejtëzës e sjellim në formën segmentale:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{12}{k}} = 1 \quad (*)$$

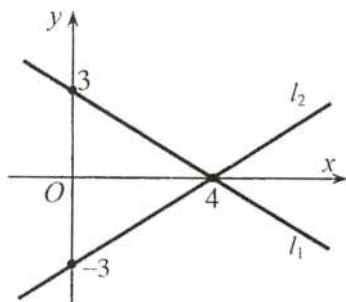


fig.3

Prej këtu vijon se pikëprerjet e drejtëzës së dhënë me boshtet koordinative janë $A(4,0)$ dhe $B(0, \frac{12}{k})$. Në pajtim me kushtin e detyrës kemi $\overline{AB} = 5$, d.m.th.

$$\sqrt{(0-4)^2 + (\frac{12}{k} - 0)^2} = 5 \Leftrightarrow 16 + \frac{144}{k^2} = 25,$$

prej ku caktojmë: $k = \pm 4$. Domethënë, ekzistojnë dy drejtëza (l_1) dhe (l_2) që e plotësojnë kushtin e dhënë (fig.3). Prej (*) caktojmë :

$$l_1 : \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ dhe } l_2 : \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1 \blacksquare$$

DETYRA

- Shkruaji barazimet e drejtëzave në formën e përgjithshme të cilat në boshtet koordinative prejnë segmente: a) $m = 3, n = 2$; b) $m = -4, n = 3$; c) $m = 6, n = \frac{5}{2}$; ç) $m = -2, n = 3$.
- Janë dhënë drejtëzat në formën e përgjithshme. Shkruaji në formën segmentale këto barazime të drejtëzave:
a) $3x - 2y - 2 = 0$; b) $x - 3y + 6 = 0$; c) $3x + 4y - 10 = 0$.
- Janë dhënë barazimet në formën segmentale:
a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$; b) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1$; c) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$; Caktoji koeficientët e drejtim të atyre drejtëzave.
- Në barazimin e drejtëzës $ax + 4y - 8 = 0$, caktoji a ashtu që segmenti në boshtin x të jetë: a) 4; b) -6.
- Në barazimin e drejtëzës $2x + 5\lambda y - 3 = 0$, cakto λ ashtu që segmentet në boshtet koordinative të jenë të barabarta.
- Në barazimin e drejtëzës $3ax + 4y - 5 = 0$, cakto a , ashtu që shuma e segmentave në boshtet koordinative është 5.
- Në barazimin e drejtëzës $3ax - 4y + 15 = 0$, caktoji a , ashtu që ndryshimi i segmenteve të boshteve koordinative të jetë 10.
- Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën $M(6,0)$ dhe me boshtet koordinative formon trekëndësh me syprinë 30 katror njësi.
- Si është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $S(2,-1)$ dhe prenë segmente të barabartë me boshtet koordinative?
- 10*. Shkruaji barazimet e brinjëve të rombit, diagonalet e të cilit me gjatësi 16 dhe 18 shtrihen në boshtet koordinative.
11. Njehsoje syprinën e trekëndëshit të kufizuar me boshtet koordinative dhe drejtëzën $3x + 4y - 12 = 0$.

4.2.4 PRERJA E DY DREJTËZAVE. KËNDI NDËRMJET DY DREJTËZAVE

1. Le të jenë dhënë dy drejtëza me barazimet e tyre në formën e përgjithshme:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

për të cilat supozojmë se priten, d.m.th. kanë një pikë të përbashkët $M(x_0, y_0)$ (**pikëprerje**). E parashtrojmë detyrën: *t'i caktojmë koordinatat e pikëprerjeve të drejtëzave (1).*

Pasi pikëprerja $M(x_0, y_0)$ shtrihet në të dy drejtëzat, koordinatat e saj x_0 dhe y_0 i kënaqin të dy barazimet (1). Por vlen edhe anasjelltas, d.m.th. nëse (x_0, y_0) është zgjidhje e sistemit (1), atëherë pika $M(x_0, y_0)$ shtrihet në çdonjërin prej drejtëzave (1).

Prandaj, koordinatat e prerjes së dy drejtëzave e paraqesin zgjidhjen e sistemit (1), që e formojnë barazimet e drejtëzave të dhëna.

Duke e zgjidhur sistemin e barazimeve (1), me njërin prej metodave të njohura, arrijmë deri te zgjidhja:

$$x = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}; \quad y = \frac{A_1C - AC_1}{AB_1 - A_1B} \quad (2)$$

Tani më e ke të njohur se, varësisht prej koeficientëve të sistemit (1) të mundshme janë tre raste :

a) Nëse $AB_1 - A_1B \neq 0$ d.m.th. $\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}$, sistemi (1) ka një zgjidhje, d.m.th. drejtëzat (1) priten në një

pikë. Koordinatat e pikëprerjes janë dhënë me barasitë (2).

b) Nëse $AB_1 - A_1B = 0$ d.m.th. $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$, kurse $BC_1 - B_1C \neq 0$ dhe $A_1C - AC_1 \neq 0$ ose

$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$, sistemi (1) nuk ka zgjidhje, kurse kjo do të thotë se drejtëzat nuk priten, përkatësisht, *ato janë paralele*.

c) Nëse $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, sistemi (1) është i pacaktuar, d.m.th. ka bashkësi të pafundme të zgjidhjeve.

Kjo, prap, do të thotë se të gjitha pikat prej drejtëzave (1) janë të përbashkëta, përkatësisht *drejtëzat puthiten*.

➤ **Shembulli 1.** Janë dhënë drejtëzat $5x - y + 1 = 0$ dhe $2x + y - 8 = 0$. Të provojmë vallë drejtëzat priten, kurse në rastin e konstatuar ta caktojmë pikëprerjen.

Zgjidhje. Prej barazimeve të drejtëzave $5x - y + 1 = 0$ dhe $2x + y - 8 = 0$, ku $A = 5$, $B = -1$, $C = 1$ dhe $A_1 = 2$, $B_1 = 1$, $C_1 = -8$ vijon $\frac{5}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-8}$, që do të thotë se të dy drejtëzat priten, kurse pikëprerja është $M(1,6)$ (provo !). ■

➤ **Shembulli 2.** Të provojmë vallë drejtëzat $3x - y + 5 = 0$ dhe $3x - y - 7 = 0$ janë paralele. Pse?

➤ **Shembulli 3.** Drejtëzat $2x - 3y + 1 = 0$ dhe $10x - 15y + 5 = 0$ puthiten. Pse?

➤ **Shembulli 4.** Ta caktojmë barazimin e drejtëzës që kalon nëpër prerjen e drejtëzave: $2x + 3y - 5 = 0$ dhe $3x + 4y - 7 = 0$, kurse koeficienti i drejtimit të drejtëzës së kërkuar është 3.

Zgjidhje. Zgjidhim sistemin e barazimeve të drejtëzave të dhëna:
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

dhe po ashtu fitojmë se pikëprerja është $M(1,1)$, kurse pastaj duhet ta shkruajmë barazimin e drejtëzës nëpër pikën $M(1,1)$, me koeficientin e drejtimit $k = 3$. kemi:

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ d.m.th. } 3x - y - 2 = 0 \blacksquare$$

2. Shpeshherë në të mësuarit tënd të matematikës ke hasur konceptin këndi ndërmjet dy drejtëzave prej rrafshit të dhënë, por deri më tani nuk ke mësuar se si ta caktosh. Atë do ta mundëson gjeometria analitike.

Le të jenë dhënë dy drejtëza në formën eksplicite

$$l_1: y = k_1x + n_1 \quad \text{dhe} \quad l_2: y = k_2x + n_2$$

që priten dhe asnjëra nuk është paralele me boshtin y . Nën kënd ndërmjet drejtëzave l_1 dhe l_2 do ta nënkuptojmë këndin e ngushtë φ (tjetri është $180^\circ - \varphi$) (fig.1). Le të jetë α_1 dhe α_2 kënde të cilat drejtëzat l_1 dhe l_2 i formojnë me kahen pozitive të boshtit x përkatësisht. Prej trekëndëshit ABC në fig. 1, vijon: $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$, përkatësisht $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, prej ku

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} \quad (1)$$

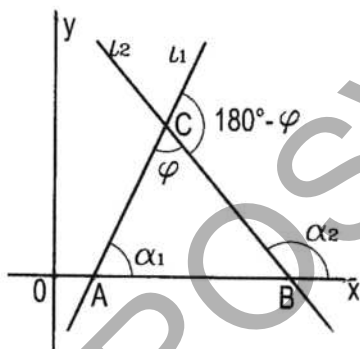


fig.1

Por $\operatorname{tg} \alpha_1$ dhe $\operatorname{tg} \alpha_2$ janë koeficientët e drejtimit të drejtëzave l_1 dhe l_2 përkatësisht, pra nëse vëndojmë $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, atëherë prej barasisë (1) e fitojmë formulën për këndin ndërmjet dy drejtëzave

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (2)$$

Me zbatimin e formulës (2) në rastin konkret, mund të fitojmë $\operatorname{tg} \varphi > 0$ ose $\operatorname{tg} \varphi < 0$. Në rastin e parë është përcaktuar këndi i ngushtë, kurse në rastin e dytë këndi i gjerë ndërmjet drejtëzave të dhëna.

➤ **Shembulli 5.** Ta caktojmë këndin ndërmjet drejtëzave $y = 2x - 3$ dhe $3x + y - 2 = 0$.

Zgjidhje. Koeficienti i drejtimit për drejtëzën është $k_1 = 2$, kurse për të dytën, pasi paraprakisht ta shkruajmë në formën eksplicite $y = -3x + 2$, $k_2 = -3$. Tani me zbatimin e formulës (2), fitojmë:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - 2}{1 + 2(-3)} = 1, \text{ prej ku } \varphi = 45^\circ. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 6.** Ta caktojmë këndin ndërmjet drejtëzave $3x - 5y + 2 = 0$ dhe $4x + 5y - 5 = 0$.

Zgjidhje. Koeficientët e drejtimit të dy drejtëzave janë $k_1 = \frac{3}{5}$ dhe $k_2 = -\frac{4}{5}$ përkatësisht.

Atëherë, prej (2) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{-4}{5} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}} = -\frac{35}{13}$, prej ku fitojmë $\varphi = \operatorname{arctg}(-\frac{35}{13})$, d.m.th. $\varphi \approx 110^\circ 22'$, kurse $\varphi_1 \approx 69^\circ 37'$. ■

➤ **Shembulli 7.** Këndi i ngushtë ndërmjet dy drejtëzave është 45° . Nëse njëra prej atyre drejtëzave është $2x - 3y + 4 = 0$, ta caktojmë barazimin e drejtëzës tjetër, e cila në boshtin y prenë segment me gjatësi 7 njësi.

Zgjidhje. Koeficienti i drejtimit të drejtëzës së dhënë është $k_1 = \frac{2}{3}$. Sipas kushteve të detyrës drejtëza tjetër është $y = k_2 x + 7$. Prej formulës për këndin ndërmjet dy drejtëzave (2), fitojmë:

$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k_2 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}k_2} \right|$, prej ku $k_2 = 5$. Vijon, barazimi i drejtëzës së dhënë do të jetë $y = 5x + 7$ d.m.th.
 $5x - y + 7 = 0$ ose $x + 5y - 7 = 0$ (pse ?) ■

DETYRA

- Caktoje pikëprerjen e drejtëzave:
 - $2x - 3y + 1 = 0$ dhe $3x - 2y - 1 = 0$;
 - $3x + 2y - 4 = 0$ dhe $6x + 4y - 17 = 0$; c) $2x + y - 4 = 0$ dhe $x - 2y + 3 = 0$;
- Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër prerjen e drejtëzave $4x + 3y - 7 = 0$ dhe $3x + 2y - 5 = 0$, kurse koeficienti i drejtimit është i barabartë me koeficientin e drejtimit të drejtëzës $2x + y = 5$.
- Barazimet e brinjëve të një paralelogrami janë:
 $y - 3x + 9 = 0$, $5x + 3y - 18 = 0$, $y - 3x - 1 = 0$ dhe $5x + 3y - 2 = 0$.
 Caktoji barazimet e diagonaleve të paralelogramit.
- Caktoje m ashtu që barazimet $mx - 3y - 2n = 0$ dhe $3x - my - m + 1 = 0$ të jenë paralele.
- Caktoje m ashtu që drejtëzar $(m - 2)x + my - 2 = 0$ dhe $6x + (m + 8)y - m - 2 = 0$ puthiten.
- * Caktoje m ashtu që prerja e drejtëzave
 $(m + 2)x + (1 + 5m)y - 15 = 0$ dhe $(5 - 2m)x + (1 - 10m)y - 9 = 0$,
 është pika e cila shtrihet në drejtëzën $x + y + 6 = 0$.
- Caktoje këndin ndërmjet drejtëzave $2x + y - 1 = 0$ dhe $3x - y + 2 = 0$.
- Caktoje këndin ndërmjet drejtëzave $x - 2y + 3 = 0$ dhe $x - 3 = 0$.
- Cfarë këndi formojnë drejtëzat $x + 2 = 0$ dhe $y - 3 = 0$?
- Cakto këndin ndërmjet drejtëzave $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$ dhe $x\sqrt{6} - 6y + 3 = 0$.
- Caktoji këndet e brendshme të trekëndëshit, nëse janë dhënë barazimet e brinjëve të tij $18x + 16y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$ dhe $5x + 10y - 9 = 0$.
- Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(2, -1)$, kurse me drejtëzën $5x - 2y + 3 = 0$ formon kënd prej 45° .

4.2.5. KUSHTI PËR PARALELIZËM DHE NORMALE TË DREJTËZAVE

1. Në pikën paraprake shikuam cili kusht duhet ta kënaqin koeficientët në barazimet e dy drejtëzave të dhëna me barazimet e tyre në formën e përgjithshme.

Tani do të shikojmë se si kushtet për paralelizëm dhe normale të dy drejtëzave mund t'i fitojmë duke u nisur prej disa parametrave tjerë përcaktues për drejtëzat.

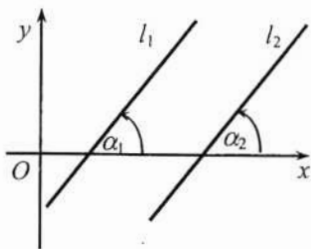


fig. 1

Nëse drejtëzat l_1 dhe l_2 janë paralele, atëherë këndet që ato i formojnë me kahen pozitive të boshti x janë të barabarta, d.m.th. $\alpha_1 = \alpha_2$ (fig.1), por atëherë edhe $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, përkatësisht

$$k_1 = k_2$$

(1)

Vlen edhe anasjelltas: nëse $k_1 = k_2$ atëherë $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, prej ku kemi $\alpha_1 = \alpha_2$, ose $\alpha_1 = \alpha_2 + 180^\circ$, kurse prej këtu vijon se drejtëzat janë paralele.

Domethënë, dy drejtëza janë **paralele** nëse dhe vetëm nëse të dy drejtëzat kanë koeficient të njëjtë të drejtimit.

A është e mundur deri te i njëjti kusht për paralelizëm të arrijmë edhe në tjetër mënyrë. Përgjigjen e kësaj pyetje do ta ilustrojmë me disa shembuj.

➤ **Shembulli 1.** Të provojmë se drejtëzat $2x - 3y + 1 = 0$ dhe $4x - 6y - 5 = 0$ a janë paralele.

Zgjidhje. Koeficientët e drejtimit për drejtëzat e dhëna janë $k_1 = \frac{2}{3}$ dhe $k_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, d.m.th.

$k_1 = k_2$, pra vijon se drejtëzat janë paralele. ■

Deri te i njëjti rezultat do të arrijmë edhe nëse e zbatojmë formulën për këndin ndërmjet dy

drejtëzave. Kemi: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0$ prej ku caktojmë $\varphi = 0^\circ$ ose $\varphi = 180^\circ$, prej ku pra vijon se drejtëzat janë paralele.

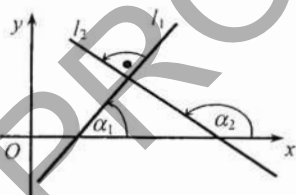


fig.2

2. Nëse drejtëzat l_1 dhe l_2 janë normale njera në tjetrën, atëherë $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ (fig.2), prej ku vijon

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \text{ d.m.th.}$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

ose

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

(2)

Vlen dhe anasjelltas, nëse $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, atëherë $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$, prej ku vijon

$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$, d.m.th. drejtëzat l_1 dhe l_2 janë reciprokisht normale.

Domethënë, dy drejtëza janë reciprokisht **normale** nëse koeficientët e drejtimit i kanë reciprok dhe me shenjë të kundërt.

➤ **Shembulli 2.** Për cilën vlerë të k drejtëza $y = kx + 1$ është normale në drejtëzën $y = 2x - 1$?

Zgjidhje. Koeficienti i drejtimit të drejtëzës së dytë është 2, pra duke e shfrytëzuar kushtin për drejtëzat normale ndërmjet dy drejtëzave, fitojmë $2k = -1$, prej ku $k = -\frac{1}{2}$, pra barazimi i drejtëzës së parë do të jetë $y = -\frac{1}{2}x + 1$ përkatësisht $x + 2y - 2 = 0$ ■

➤ **Shembulli 3.** Të shkruajmë barazim të drejtëzës e cila në boshtin y prenë segment prej 3 njësi dhe është normale në drejtëzën $5x - 4y - 13 = 0$.

Zgjidhje. Barazimi i drejtëzës së dhënë le të jetë $y = kx + 3$, ku duhet të caktohet koeficienti k prej kushtit për drejtëzën normale me drejtëzën tjetër. Për drejtëzën e dhënë $5x - 4y - 13 = 0$ kemi $k_1 = \frac{5}{4}$, prandaj koeficienti i drejtimit të drejtëzës së kërkuar do të jetë $k = -\frac{4}{5}$, kurse barazimi i drejtëzës së kërkuar do të jetë $y = -\frac{4}{5}x + 3$, përkatësisht $4x + 5y - 15 = 0$ ■

➤ **Shembulli 4.** Të shkruajmë barazim të drejtëzës e cila kalon nëpër pikën $M(1,3)$ dhe është paralele me drejtëzën $x - y + 3 = 0$.

Zgjidhje. Barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(1,3)$ do të jetë $y - 3 = k(x - 1)$. Por, ajo është paralele me drejtëzën $x - y + 3 = 0$ d.m.th. $y = x + 3$ koeficienti i drejtimit i të cilit është $k_1 = 1$, prandaj barazimi i drejtëzës së kërkuar do të jetë $y - 3 = 1(x - 1)$ përkatësisht $x - y + 2 = 0$ ■

➤ **Shembulli 5.** Të caktojmë barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën $M(-2,3)$ dhe është normale në drejtëzën $2x - 3y + 6 = 0$.

Zgjidhje. Barazimi i kërkuar do të jetë: $y - 3 = k(x + 2)$. Por, ajo është normale në drejtëzën me koeficientin $k_1 = \frac{2}{3}$, pra prej këtu $k_1 \cdot \frac{2}{3} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$. Prandaj barazimi i drejtëzës së kërkuar do të jetë $y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$ ose $3x + 2y = 0$ ■

➤ **Shembulli 6.** Ta caktojmë barazimin e lartësisë AD të trekëndëshit ABC kulmet e të cilit janë në pikat $A(2,6)$, $B(-3,1)$ dhe $C(6,0)$.

Zgjidhje. Drejtëza BC e ka koeficientin e drejtimit $k = \frac{1-0}{-3-6} = -\frac{1}{9}$. Pasi lartësia AD është

normale me brinjën BC koeficienti i drejtimit të drejtëzës që e përmban lartësinë AD do të jetë $k_1 = 9$, pra barazimi i lartësisë AD është

$$y - 6 = 9(x - 2), \text{ përkatësisht } 9x - y - 12 = 0 \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 7.** Ta caktojmë pikën M , e cila është simetrike me pikën $N(3,9)$ në lidhje me drejtëzën $p: y = 2x - 2$.

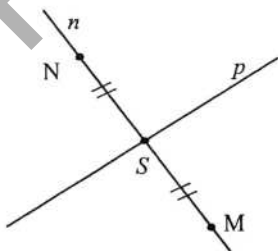


fig.3

Zgjidhje. Mënyra për gjetjen e pikës simetrike $M(x,y)$ është kjo : nëpër pikën N tërheqim drejtëz (n) normale në drejtëzën (p) , e gjejmë pikëprerjen $S = (p) \cap (n)$, kurse pastaj e gjejmë edhe pikën M prej kushtit pika S të jetë mesi për segmentin MN (fig.3). Domethënë kemi: $n : y - 9 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, përkatësisht $x + 2y = 21$, pra prej sistemit të barazimeve $\begin{cases} x + 2y = 21 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ caktojmë $S(5,8)$. Për caktimin e koordinatave të pikës M , prej kushtit S është mesi i segmentit MN , i kemi barazimet: $5 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow x = 7$ dhe $8 = \frac{9+y}{2} \Leftrightarrow y = 7$, prej ku është $M(7,7)$ ■

DETYRA

- Cilat prej drejtëzave të përmendura janë ndërmjet veti paralele, kurse cilat ndërmjet veti janë normale:
a) $y = -x + 4$; b) $y = 2x - 1$; c) $y = x - 7$; ç) $y = 2x - 3$; d) $y = -0.5x + 8$?
- Për cilat vlera të A , B dhe C drejtëza $Ax + By + C = 0$ është paralele me drejtëzën $2x - y + 3 = 0$ dhe në boshtin e ordinatave prenë segment me gjatësi 5 njësi?
- Caktoje rrënzën e pikës së normales të tërhequr prej pikës $A(5,9)$ deri te drejtëza $4x - 7y + 21 = 0$.
- Caktoje m , ashtu që drejtëzat $8mx + 3y - 4 = 0$ dhe $12x + 4my + 6 = 0$, të jenë ndërmjet veti normale.
- Si është barazimi i drejtëzës e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe është normale në drejtëzën $3x - y - 2 = 0$?
- Kulmet e një trekëndëshi janë $A(-2,2)$, $B(3,5)$ dhe $C(6,-3)$. Shkruaje barazimin e lartësisë të tërhequr nga kulmi A .
- Trekëndëshi ABC është dhënë me kulmet $A(-4,-2)$, $B(2,7)$ dhe $C(8,4)$. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën e rëndimit dhe është normale me brinjën AC .
- * Në drejtëzën $x + y - 4 = 0$ cakto pikë prej të cilës segmenti pika e skajshme e të cilit janë $A(3,3)$ dhe $B(0,2)$ shikohet nën këndin prej 45° .
- Cakto parametrat m dhe n , për të cilët drejtëzat $mx + 8y + n = 0$ dhe $2x + my - 1 = 0$ do të jenë:
a) paralele; b) normale.
- Caktoje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër prerjen e drejtëzave $3x - y - 1 = 0$ dhe $2x + 3y - 8 = 0$ dhe është normale në drejtëzat: a) $x - 2y + 3 = 0$; b) $5x + 6y + 8 = 0$.
- Drejtëzat $5x + my - 5m = 0$ dhe $x + 3y + 10 = 0$ priten nën këndin 45° . Caktoje parametrin m , kurse pastaj nëpër pikëprerjen shkruaje barazimin e drejtëzës normale në drejtëzën e parë.
- Në drejtëzën $3x + 2y - 5 = 0$, cakto pikë një lloj të larguar prej pikave $A(-1,-1)$ dhe $B(3,3)$.

4.2.6. FORMA NORMALE E BARAZIMIT TË DREJTËZËS

Le të jetë l drejtëz në çfarëdo pozitë në lidhje me sistemin koordinativ në rrafsh pozita e së cilës është përcaktuar me largësinë p prej fillimit të koordinatave dhe me këndin φ që normalja p e formon me kahen pozitive të boshtit x (fig.1). Domethënë, parametra përcaktues këtu janë p dhe φ . Barazimi i drejtëzës l le të jetë dhënë në formën segmentale:

$$l: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

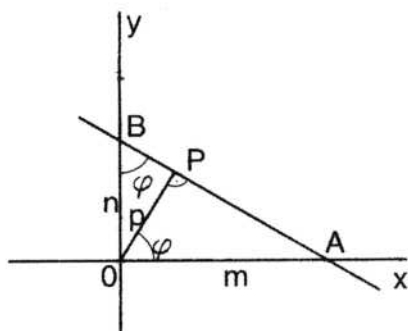


fig.1

(1)

Prej $\triangle OPA$ vijon se $\cos \varphi = \frac{P}{m}$ ose $m = \frac{P}{\cos \varphi}$,

kurse prej $\triangle OPB$ vijon se $\sin \varphi = \frac{P}{n}$ ose $n = \frac{P}{\sin \varphi}$.

Nëse këto vlera për m dhe n i zëvendësojmë në barazimin (1),

fitojmë: $\frac{\cos \varphi}{p} x + \frac{\sin \varphi}{p} y = 1$ përkatësisht

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

(2)

Barazimi (2) paraqet barazimin në **formën normale** (të Hesit) të drejtëzës. Në të paraqiten të dy parametrat përcaktues: p dhe φ . Poashtu, parametri p që e paraqet gjatësinë e normales prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza l pranon gjithmonë vlera pozitive, kurse këndi φ ndryshon prej 0° deri në 360° .

➤ **Shembulli 1.** Ta formojmë barazimin e drejtëzës në formën normale nëse normalja p , e tërhequr prej fillimit të koordinatave O deri te drejtëza, formon me boshtin x kënd $\varphi = 240^\circ$, kurse largësia prej O deri te drejtëza është $p = 5$.

Zgjidhje. Pasi janë dhënë parametrat përcaktues, me zëvendësimin e drejtpërdrejt në barazimin (2) fitojmë me radhë:

$x \cos 240^\circ + y \sin 240^\circ - 5 = 0$ d.m.th. $x \cos(180^\circ + 60^\circ) + y \sin(180^\circ + 60^\circ) - 5 = 0$, prej ku fitojmë $x(-\cos 60^\circ) + y(-\sin 60^\circ) - 5 = 0$ d.m.th. $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ + 5 = 0$ dhe përfundimisht drejtëza e kërkuar është $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 5 = 0$ përkatësisht $x + \sqrt{3}y + 10 = 0$ ■

Tani më shikuar se si format e ndryshme të barazimeve të drejtëzës së dhënë, forma e përgjithshme, eksplicite, segmentale, transformohen njëra në tjetrën. Këtu e parashtrijmë të njëjtën pyetje: Si prej drejtëzës së dhënë l barazimin e formës së përgjithshme ta transformojmë (sjellim) në formën normale? Të përpiqemi të përgjigjemi në këtë pyetje.

Le të jenë dhënë forma e përgjithshme dhe normale e barazimit të drejtëzës:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{dhe} \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

Pasi të dy barazimet duhet të paraqesin drejtëz të njëjtë, atëherë koeficientët e drejtimit të tyre patjetër duhet të jenë proporcionale (shih 4.2.4), d.m.th. duhet të vlejë

$$\frac{\cos \varphi}{A} = \frac{\sin \varphi}{B} = \frac{-p}{C} = \lambda \quad (3)$$

ku λ është koeficienti i proporcionalitetit, që duhet ta caktojmë. Prej barasisë (3) kemi

$$\cos \varphi = \lambda A, \quad \sin \varphi = \lambda B, \quad -p = \lambda C \quad (4)$$

Nëse dy barasitë e para së pari i kuadrojmë kurse pastaj i mbledhim, fitojmë:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \lambda^2 (A^2 + B^2) \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2} \text{ d.m.th. } \lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Me zëvendësimin e λ në barazimin (4), fitojmë:

$$\cos \varphi = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \varphi = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, p = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

Nëse këto shprehje për $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ dhe p i zëvendësojmë në formën normale të barazimit të drejtëzës (2), e fitojmë barazimin:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (6)$$

që është gjithashtu barazimi i drejtëzës në formën normale.

Duhet të përgjigjemi edhe në pyetjen: *Cilin prej të dy shenjave para rrënjës ta marrim parasysh?* Përgjigjen tani më e kemi. Ai përcaktohet prej barasisë së tretë nga barasitë (5). Sikurse që theksuam, parametri p gjithmonë është pozitiv, pra është e qartë se shenja para rrënjës patjetër duhet të jetë e kundërt me shenjën e koeficientit C .

➤ **Shembulli 2.** Ta sjellim në formën normale barazimin e drejtëzës, të dhënë në formën e përgjithshme: $3x + 5y - 6 = 0$.

Zgjidhje. Sipas formulës (6) kemi: $\frac{3x + 5y - 6}{\sqrt{9 + 25}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 5y - 6}{\sqrt{34}} = 0$ ose

$$\frac{3}{\sqrt{34}}x + \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{6}{\sqrt{34}} = 0, \text{ prej ku kemi}$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}, \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{34}} \text{ dhe } p = \frac{6}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{34} = \frac{3\sqrt{34}}{17}. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Ta caktojmë këndin që normalja e tërhequr prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza (l): $x - y + 1 = 0$, e formon me kahen pozitive të boshtit x dhe gjatësisë së normales p .

Zgjidhje. E sjellim barazimin e drejtëzës në formën normale: $\frac{x - y + 1}{-\sqrt{2}} = 0$, përkatësisht

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \text{ Prej barazimit të fundit kemi: } \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ prej ku}$$

$$\text{gjejmë } \varphi = 135^\circ, \text{ kurse } p = \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Është dhënë barazimi i drejtëzës në formën eksplicite $y = kx + n$. Ta sjellim në formën normale.

Zgjidhje. Prej $y = kx + n \Leftrightarrow kx - y + n = 0$ kemi $\frac{kx - y + n}{\pm \sqrt{k^2 + 1}} = 0$, kurse ky është barazimi i drejtëzës në formën normale. ■

➤ **Shembulli 5.** Drejtëza e dhënë me barazimin $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$ a është në formën normale?

Zgjidhje. Nëse barazimi i dhënë i drejtëzës është në formën normale, atëherë do të kemi:

$$\cos \varphi = \frac{12}{13}, \quad \sin \varphi = \frac{5}{13}, \quad \text{pra patjetër duhet të vlejë: } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad \text{Pasi } \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

barazimi i dhënë është në formën normale. ■

DETYRA

- Shkruaje barazimin e drejtëzës, largësia e së cilës deri te fillimi i koordinatave është p kurse këndi ndërmjet normales p dhe boshti x është φ , nëse: a) $p = 5, \varphi = 45^\circ$; b) $p = 12, \varphi = 210^\circ$; c) $p = 10, \varphi = 330^\circ$
- Shkruaji në formën normale drejtëzat e dhëna:
a) $3x - 4y + 7 = 0$; b) $5x + 12y - 26 = 0$; c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
- Provo se drejtëza $2x - 3y + 1 = 0$ a është shkruar në formën normale?
- Shkruaji në formën normale drejtëzat: a) $2x - 3 = 0$; b) $4y + 5 = 0$.
- Shkruaji në formën normale drejtëzat: a) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$; b) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{7} = 1$; c) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$.
- Shkruaji në formën normale drejtëzat: a) $5x - 12y = 0$; b) $8x + 15y = 0$.
- Njehsoje gjatësinë e normales të tërhequr prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza:
a) $l: x + y - \sqrt{2} = 0$; b) $l_1: 3x - 4y + 55 = 0$.

4.2.7. LARGËSIA PREJ PIKËS DERI TE DREJTËZA

Le të jenë dhënë drejtëza l dhe pika M_1 jashtë drejtëzës l . E ke të njohur se, nëse M është rrënza e normales prej pikës M_1 deri te drejtëza l , atëherë gjatësia d prej pikës deri te drejtëza është e barabartë me gjatësinë e segmentit M_1M , d.m.th. $d = M_1M$.

Duke e zbatuar formën normale të barazimit të drejtëzës, do të nxjerrim formulën sipas së cilës mundemi thjeshtë ta caktojmë largësinë d , edhe pse të njëjtën largësi mund ta caktojmë edhe në mënyrë tjetër, duke shfrytëzuar disa paranjohuri tjera.

Drejtëza l le të jetë e dhënë me barazimin në formën normale: $l: x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ dhe $M_1(x_1, y_1)$ është pikë jashtë prej drejtëzës l . Nëse supozojmë se drejtëza l nuk kalon nëpër fillimin e koordinatave, të mundshme janë dy raste: pika $M_1(x_1, y_1)$ dhe fillimi i koordinatave janë në anë të njëjtë të drejtëzës l (fig.1) ose janë prej anës së ndryshme të drejtëzës l (fig.2) do ta shqyrtojmë rastin e parë (fig. 1). Nëpër $M_1(x_1, y_1)$ tërheqim drejtëz l_1 paralele me drejtëzën e dhënë l . Atëherë, largësia prej fillimit të koordinatave O deri te drejtëza l_1 është $\overline{ON} = p - d$, pra mund ta shkruajmë barazimin e drejtëzës l_1 në formën normale:

$$l_1: x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p - d) = 0$$

Pasi $M_1 \in l_1$, koordinatat e saja x_1 dhe y_1 e kënaqin barazimin e (l_1) , pra kemi

$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - (p - d) = 0,$$

prej ku gjejmë:

$$d = -(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p) \quad (1)$$

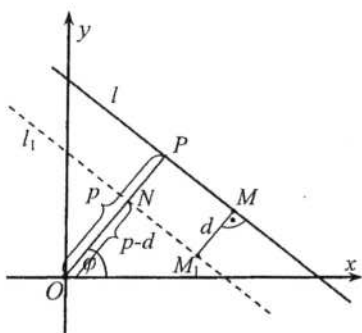


fig.1

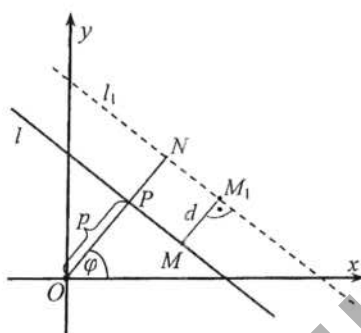


fig.2

Në rastin e dytë, kur fillimi i koordinatave dhe pika $M_1(x_1, y_1)$ janë nga anët e ndryshme të drejtëzës l , në mënyrë analoge fitojmë (vërteto!):

$$d = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p \quad (2)$$

Pasi numri $x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p$ mund të jetë pozitiv (nëse O dhe M_1 janë në anën e njëjtë prej drejtëzës l), por edhe negativ (nëse O dhe M_1 janë në anë të ndryshme prej drejtëzës l), kurse largësia është gjithmonë numër pozitiv, (1) dhe (2) i shkruajmë me formulën:

$$d = |x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p| \quad (3)$$

Nëse barazimi i drejtëzës l është dhënë në formën

$$Ax + By + C = 0,$$

atëherë (shih në pikën paraprahe):

$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

pra për largësinë d prej pikës $M_1(x_1, y_1)$ deri te drejtëza l e kemi formulën:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (4)$$

➤ **Shembulli 1.** Ta caktojmë largësinë prej pikës $M(-5, 7)$ deri te drejtëza $3x - 4y + 18 = 0$.

Zgjidhje. Në pajtim me formulën (4) fitojmë $d = \left| \frac{3 \cdot (-5) - 4 \cdot 7 + 18}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-25}{-5} \right| = 5$ ■

➤ **Shembulli 2.** Ta njehsojmë largësinë prej pikës $A(12, 15)$ deri te drejtëza $y = x$.

Zgjidhje. Barazimin e drejtëzës së dhënë e shkruajmë në formën e përgjithshme $x - y = 0$, prej ku fitojmë $d = \left| \frac{12 - 15}{\sqrt{1 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{2}} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ■

➤ **Shembulli 3.** Ta caktojmë largësinë ndërmjet drejtëzave paralele $p: 12x - 5y + 48 = 0$ dhe $q: 12x - 5y + 217 = 0$.

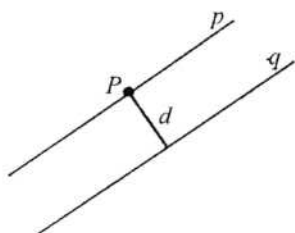


fig.3

Zgjidhje. Largësia d ndërmjet dy drejtëzave paralele është e barabartë me largësinë prej çfarëdo pike prej njëres drejtëz deri te drejtëza tjetër (fig. 3). Për këtë qëllim, në njëren prej drejtëzave të dhëna, për shembull të (p), zgjedhim çfarëdo pikë P dhe e caktojmë largësinë e kësaj pike deri te drejtëza tjetër (q). Për shembull, drejtëzës (p) i takon pika $P(-4,0)$. Koordinatat e kësaj pike i përcaktojmë ashtu që njëren koordinatë e zgjedhim çfarëdo, për shembull $y = 0$, kurse pastaj koordinatën tjetër x e përcaktojmë prej kushtit koordinatat $(x,0)$ ta kënaqin barazimin e drejtëzës (p), d.m.th.

$$12x - 5 \cdot 0 + 48 = 0, \text{ prej ku fitojmë } x = -4.$$

Tani e caktojmë largësinë d të pikës P deri te drejtëza q , e cila në pajtim me formulën (4) është

$$d = \left| \frac{12 \cdot (-4) - 5 \cdot 0 + 217}{-\sqrt{144 + 25}} \right| = \left| \frac{169}{-13} \right| = 13$$

prandaj ajo është largësia ndërmjet dy drejtëzave .

■

➤ **Shembulli 4.** Ta caktojmë brazimin e simetrales (s) të këndit ndërmjet drejtëzave

$$p: 3x + 4y - 15 = 0 \text{ dhe } q: 5x - 12y + 26 = 0$$

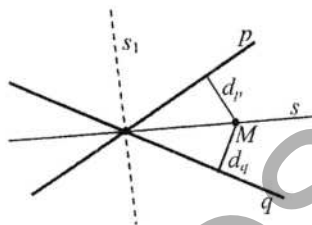


fig.4

Zgjidhje. Në pajtim me përkufizimin e simetrales së këndit, për çfarëdo pikë $M(x,y)$ që shtrihet në simetralen s largësitë deri te të dy drejtëzat p dhe q përkatësisht, janë të barabarta, d.m.th. $d_p = d_q$ (fig.4).

$$\text{Pasi } d_p = \left| \frac{3x + 4y - 15}{5} \right|, d_q = \left| \frac{5x - 12y + 26}{-13} \right|, \text{ kemi}$$

$$\frac{3x + 4y - 15}{5} = \left| \frac{5x - 12y + 26}{-13} \right|, \text{ përkatësisht}$$

$$39x + 52y - 195 = \pm(-25x + 60y - 130),$$

prej barazimeve të simetraleve të shkruara në formën e përgjithshme janë:

$$s_1: 64x - 8y - 65 = 0 \text{ dhe } s_2: 14x + 112y - 325 = 0.$$

➤ Pasi të dy drejtëzat formojnë dy çifte të këndeve të kryqëzuara, vijon se simetralet s_1 dhe s_2 janë ndërmjet veti normale. ■

➤ **Shembulli 5.** T'i njehsojmë lartësitë e trekëndëshit ABC kulmet e të cilëve janë $A(-2,5)$, $B(6,-3)$ dhe $C(1,9)$.

Zgjidhje. Së pari i caktojmë barazimet e brinjëve të trekëndëshit, kurse pastaj largësinë prej kulmeve të trekëndëshit deri te brinjët e përballta. Kemi:

$$AB: y+3 = \frac{5+3}{-2-6}(x-6) \quad \text{d.m.th.} \quad x+y-3=0; \quad AC: y-9 = \frac{5-9}{-2-1}(x-1) \quad \text{d.m.th.}$$

$$4x-3y+23=0$$

$$BC: y+3 = \frac{9+3}{1-6}(x-6) \quad \text{d.m.th.} \quad 12x+5y-57=0$$

Tani, në pajtim me formulën për largësinë prej pikës deri te drejtëza, i caktojmë gjatësitë e lartësive përkatëse:

$$h_a = \left| \frac{12 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 - 57}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \right| = \frac{56}{13}, \quad h_b = \left| \frac{4 \cdot 6 - 3 \cdot (-3) + 23}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = \frac{56}{5}, \quad h_c = \left| \frac{1+9-3}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

DETYRA

- Njehsoje largësinë prej pikës së dhënë A deri te drejtëza nëse:
a) A(8,1), $5x-12y-2=0$; b) A(1,3), $8x+15y-2=0$; c) A(0,6), $9x+12y+3=0$.
- Caktoje largësinë d ndërmjet drejtëzave paralele:
a) $4x-3y-8=0$ dhe $4x-3y+7=0$; b) $9x-12y+2=0$ dhe $9x-12y+10=0$.
- Në drejtëzën $x+y-8=0$ cakto pika të cilat janë një lloj të larguara prej pikës M(2,8) dhe prej drejtëzës $x-3y+2=0$.
- * Nëpër pikëprerjen e drejtëzave $x-7y+6=0$, $7x+y-58=0$ cakto drejtëz ashtu që pika M(1,1) të jetë në largësi 5 njësi prej drejtëzës së kërkuar.
- Koordinatat e kulmeve të trekëndëshit ABC janë:
a) A(3,5), B(7,-4), C(11,-13); b) A(-1,4), B(3,1), C(7,5).
Caktoji gjatësitë e lartësive të trekëndëshit ABC.
- Cakto barazim i cili është në largësi 4 njësi prej drejtëzës $3x+4y-8=0$.
- Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën A(3,12), dhe është në largësi $d=\sqrt{58}$ prej pikës B(7,2).
- Shqyrto se pikat $A_1(2,3)$ dhe $A_2(3,4)$ a shtrihen në të njëjtin gjysmërrafsh tehu i të cilit është drejtëza $5x-12y+8=0$.
- Shkruaji barazimet e simetraleve të këndeve të përcaktuara me drejtëzat $4x+3y-9=0$ dhe $5x+12y+24=0$.
- Cakto parametrin m , ashtu që largësia prej pikës A(2,3) deri te drejtëza $8x+15y+m=0$ të jetë 5 njësi.
- * Janë dhënë barazimet e brinjëve të drejtkëndëshit $3x-2y-5=0$ dhe $2x+3y+7=0$ dhe një kulm i tij A(-2,1). Njehsoje syprinën e drejtkëndëshit.
- * Caktoji koordinatat e qendrës së vijës rrethore të brendashkuar në trekëndësh brinjët e të cilit janë:
 $2x+y-2=0$, $x+2y+4=0$ dhe $2x-y+6=0$, kurse pastaj njehso rrezën e vijës rrethore.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM (4.1 DHE 4.2)

1. Në cilin kuadrant shtrihen pikat $M_1(a, b)$ dhe $M_2(-a, b)$? Në çfarë pozite reciproke janë në lidhje me boshtin y ?
2. Caktoji koordinatat e pikës A' simetrike me pikën $A(4, -2)$ në lidhje me boshtin x .
3. Cakto pikën M' simetrike me pikën $M(-2, 3)$ në lidhje me boshtin y .
4. Në sistemin koordinativ paraqite pikën B' , simetrike me pikën $B(2, 5)$ në lidhje me fillimin e koordinatave.
5. Është dhënë pika $M(5, 6)$. Cakto pikën M' simetrike në lidhje me: a) simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë; b) simetralen e kuadrantit të dytë dhe të katër.
6. Vektorin $\overrightarrow{OM} = (2, 4)$ paraqite në sistemin koordinativ dhe cakto gjatësinë (intenzitetin) e tij.
7. Është dhënë vektori $\overrightarrow{AB}$ me pikat e tij të skajshme $A(1, 3)$ dhe $B(4, -1)$. Caktoji komponentat dhe gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$.
8. Caktoji koordinatat e shumës dhe ndryshimit të vektorëve $\vec{a} = (3, 2)$ dhe $\vec{b} = (2, 4)$.
9. Në sistemin koordinativ konstruktoje vektorin $\vec{a} = (2, 5)$, nëse pika e tij e fillimit është: a) fillimi i koordinatave; b) pika $A(-2, 5)$.
10. Cilat janë koordinatat e vektorit $\vec{x}$, prej të cilit, nëse zbritet vektori $\vec{a} = (5, -1)$ fitohet vektori $\vec{c} = (7, 0)$.
11. Caktoji koordinatat e vektorit $\vec{x}$, i cili i shumëzuar me 3 e jep vektorin $\vec{a} = (2, -\frac{1}{3})$.
12. Cakto vektorin $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$ nëse janë dhënë: $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (4, 10)$, $\vec{c} = (-4, -10)$, $\vec{d} = (1, -1)$.
13. Konstrukto rreze vektorët: a) $\overrightarrow{OA} = (2, 0)$; b) $\overrightarrow{OB} = (0, 3)$; c) $\overrightarrow{OD} = (-3, -5)$; ç) $\overrightarrow{OE} = (4, -3)$.
14. Caktoji largësitë ndërmjet pikave:
a) $A(2, 5)$ dhe $B(14, 10)$; b) $A(5, 2)$ dhe $B(1, -1)$; c) $A(-6, 3)$ dhe $B(0, -5)$.
15. Në boshtin y cakto pikën M një lloj të larguar prej pikave $A(5, 0)$ dhe $B(2, 4)$.
16. Pika M shtrihet në simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë dhe njëlloj është e larguar prej pikës $A(6, 2)$ dhe prej fillimit të koordinatave. Caktoji koordinatat e pikës M .
17. Njehso syprinën e katrorit, nëse janë dhënë dy kulme të tij të kundërt $A(3, 5)$ dhe $C(1, 3)$.
18. Cakto qendrën dhe rrezen e vijës rrethore të jashtëshkruar rreth trekëndëshit kulmet e të cilit janë: $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ dhe $C(-5, 4)$.
19. Caktoje vllë trekëndëshi me kulme $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ dhe $C(5, -1)$ është kënddrejtë?
20. Caktoji koordinatat e pikës M e cila segmentin $AB[A(1, 6), B(21, 9)]$ e ndan në raport 1:3.
21. Me pikën M segmenti $AB[A(27, -18), B(-6, 12)]$ është ndarë në raport:
a) $k = \frac{2}{3}$; b) $k = -\frac{5}{6}$; c) $k = -\frac{4}{3}$. Caktoji koordinatat e pikës M .
22. Caktoje pikën e rëndimit të trekëndëshit ABC me kulme $A(-4, 4)$, $B(4, -7)$ dhe $C(6, 6)$.

23. Janë dhënë tre kulme të paralelogramit A(4,-1), B(2,3) dhe C(0,5). Caktoji koordinatat e kulmit të katër.
24. Segmenti M_1M_2 [$M_1(-6,-3)$, $M_2(6,6)$] është ndarë në tri pjesë të barabarta. Caktoji koordinatat e pikave të fituara.
25. Caktoji gjatësitë e vijave të rëndimit të trekëndëshit kulmet e të cilit janë A(2,6), B(14,15) dhe C(8,23).
26. Provo vallë pika A(3,1) shtrihet në drejtëzën $3x - 2y - 7 = 0$.
27. Vizatoji grafikët e funksioneve të dhëna me barazimet:
a) $x - y = 0$; b) $2x - y + 1 = 0$; c) $4x - y + 3 = 0$.
28. Shkruaje barazimin e drejtëzës, nëse është dhënë:
a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ dhe $n = 4$; b) $\alpha = 120^\circ$ dhe $n = -8$; c) $\alpha = 300^\circ$ dhe $n = -5$.
29. Shkruaje barazimin e drejtëzës paralele me boshtin x , kurse në boshtin y prenë segment me gjatësi:
a) 5 njësi; b) -3 njësi.
30. Janë dhënë barazimet e drejtëzës: a) $3x - y - 3 = 0$; b) $14x - 7y + 1 = 0$; c) $-x + 2y + 6 = 0$. Caktoje koeficientin e drejtimit (koeficientin këndor) dhe segmentin që e prenë në boshtin y .
31. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën e dhënë M dhe në boshtin y prenë segment n , nëse:
a) M(-3,6) dhe $n = 12$; b) M(1,0) dhe $n = -7$.
32. Si është barazimi i drejtëzës nëse këndin që e formon me kahen pozitive të boshtit x është 90° , kurse është paralele me boshtin y dhe prej saj është në largësi:
a) 8 njësi; b) -4 njësi.
33. Në barazimin e drejtëzës $4x - my - 7 = 0$, caktoje parametrin m , ashtu që drejtëza në boshtin y të prenë segment me gjatësi 14 njësi.
34. Në barazimin e drejtëzës $mx - y - 3m + 6 = 0$, cakto parametrin m , ashtu që drejtëza në boshtin x të prenë segment me gjatësi 14 njësi.
35. Caktoje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën A(3,-7) dhe në boshtet koordinative prenë segmente të cilat janë: a) të barabarta; b) njëri është dy herë më i madh se tjetri.
36. Nëpër pikën M(-4,3) shkruaje barazimin e drejtëzës paralele me drejtëzën $x + 2y + 3 = 0$.
37. Nëpër pikën N(6,2) shkruaje barazimin e drejtëzës normale në drejtëzën $x - 4y - 7 = 0$.
38. Caktoje barazimin e drejtëzës që e përmban lartësinë BB' të trekëndëshit, me kulme A(2,6), B(-3,1) dhe C(6,0).
39. Caktoje parametrin m , ashtu që prerja e drejtëzave $(5m + 1)x + (3m + 2)y = 15$ dhe $(13m - 14)x - (2m - 5)y - 9 = 0$ të shtrihet në drejtëzën $x + y - 3 = 0$.
40. Brinjët e një trekëndëshi janë: $x - y - 3 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$ dhe $2x + 3y + 14 = 0$.
Caktoje: a) perimetrin; b) gjatësitë e vijave të rëndimit.
41. Koordinatat e kulmeve të trekëndëshit janë A(-5,8), B(-5,2) dhe C(3,0). Shkruaji barazimet e simetraleve të brinjëve, kurse pastaj caktoji koordinatat e qendrës së vijës rrethore të jashtëshkruar rreth trekëndëshit.
42. Caktoji tangensat e këndeve të brendshme të trekëndëshit brinjët e të cilit shtrihen në drejtëzat:
a) $x + 2y = 0$, $3x - y = -1$, $x + y - 4 = 0$; b) $18x + 16y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$, $5x + 10y - 9 = 0$.
43. Cakto parametrin m , ashtu që drejtëzat $5x + my - 5m = 0$ dhe $x + 3y + 10 = 0$ formojnë kënd prej 45° .
- 44* Caktoji parametrat m dhe n , ashtu që drejtëza $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ kalon nëpër pikën A(2,1) dhe me drejtëzën $2x - y - 1 = 0$ përfshin kënd prej 45° .

45. Koordinatat e kulmeve të trekëndëshit janë: $A(0,0)$, $B(2, \frac{9}{2})$, $C(5,2)$. Caktoji gjatësitë e lartësive.
46. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikëprerjen e drejtëzave $5x - 3y - 3 = 0$ dhe $3x + y - 13 = 0$ dhe është normale në drejtëzën e dytë të dhënë.
47. Nëpër pikën $A(-4,12)$ shkruaj barazimin e drejtëzës largësia e së cilës prej pikës $B(-10,5)$ do të jetë 2 njësi.
48. Është dhënë pika $M(3,-2)$ dhe drejtëza $2x - y - 3 = 0$. Caktoje pikën M' simetrike me pikën M në lidhje me drejtëzën e dhënë.
49. Rrezja e dritës, e kahëzuar sipas drejtëzës $l: y = \frac{2}{3}x - 4$ reflektohet në boshtin x . Caktoje pikën në të cilën reflektohet rrezja dhe barazimi i drejtëzës sipas të cilës reflektohet rrezja e dritës.
50. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila është në largësi $\sqrt{5}$ prej pikës $M(2,3)$ dhe është:
a) paralele me drejtëzën $2x - y + 3 = 0$; b) normale në drejtëzën $3x - 6y - 2 = 0$.
51. Shkruaji barazimet e simetraleve të këndeve të fituar me prerjen e drejtëzave $2x - y - 5 = 0$ dhe $2x - 4y - 15 = 0$.
52. Caktoje bashkësinë e pikave largësia e të cilave prej pikave $A(3,2)$ dhe $B(2,3)$ është e barabartë.
53. Caktoje bashkësinë e pikave largësia e të cilave deri te drejtëzat $3x + 4y - 25 = 0$ dhe $5x - 12y + 26 = 0$ është e barabartë.
54. Caktoje barazimin e simetraleve të këndit të ngushtë, i formuar prej drejtëzave $3x + 4y - 36 = 0$ dhe $4x + 3y + 15 = 0$.
- 55* Janë dhënë barazimet e simetraleve të dy këndeve të brendshme të trekëndëshit ABC : $x + 4 = 0$ dhe $4x + 7y + 5 = 0$, dhe barazimi $3x + 4y = 0$ i brinjës të përcaktuar me kulmet e këndeve nëpër të cilët kalojnë simetralet e dhëna. Caktoji barazimet e brinjëve tjera të trekëndëshit.

APOLONI prej PERGE (262? - 180?) – matematikan dhe astronom i vjetër grek. Është i njohur sipas veprës së tij Prerjet konike në tetë libra, prej të cilave e fundit nuk është ruajtur. Në këtë vepër e zhvillon teorinë e lakoreve të rendit të dytë, rigoroze dhe të sistematizuar, me aq tërësi, ashtu që dy mileniume nuk ka pasur çka të shtohet ose të hiqet. Ai i ka shqyrtuar lakoret e rendit të dytë si prerje të rrafshit dhe konit të drejtë (ose i pjerrët) me bazë rrethore. I jep edhe sot emrat aktuale të atyre prerjeve: elipsa, hiperbola dhe parabola. Sot duke pasur në disponim aparatit analitik, lehtë operohet në këtë disiplinë dhe vështirë mund në tërësi ta kuptojmë madhësinë e veprës së Apolonit.

4.3. LAKORET E RENDIT TË DYTË

Në pjesën e parë të kësaj teme vërejtëm se si formohet barazimi i vijës së drejtë, e cila është njëra ndër vijat më të thjeshta. Megjithatë, vërejtëm se barazimi i drejtëzës është barazim linear, d.m.th. barazim i rendit të parë në lidhje me ndryshoret x dhe y .

Tani do ta shqyrtojmë pyetjen për formimin e barazimeve të disa vijave të lakuara të njohura si **lakore të rendit të dytë** ose **prerje konike**: vija rrethore, elipsa, hiperbola dhe parabola. Këto lakore, sikurse mund të shikosh prej fig. 1 fitohen në prerjen e sipërfaqes konike të drejtë me rrafsh në pozita të ndryshme pra prej atë edhe emri preriet konike

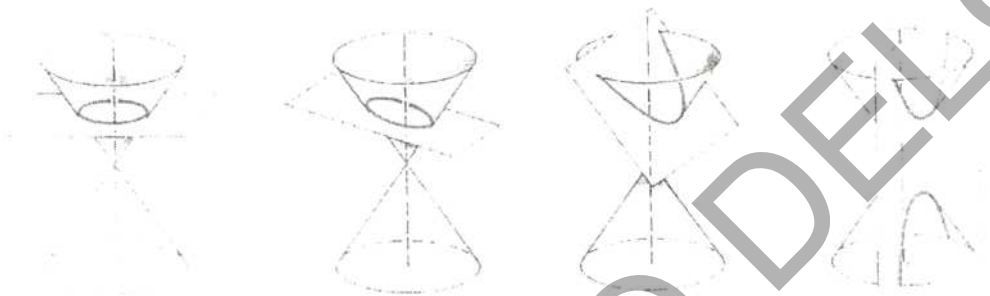


fig.1

Barazimet e këtyre vijave të lakuara janë barazime të shkallës së dytë sipa ndryshoreve x dhe y (koordinatat e pikave), d.m.th. barazime të formës

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ku A, B, C, D, E, F janë numra realë, të paktën njëri prej koeficientëve A, B, C është i ndryshueshëm prej zeros. Prandaj këto lakore janë të njohura edhe si **lakore të rendit të dytë**.

Vërejtje. Lakoret e rendit të dytë kanë qenë të studiuar qysh prej matematikanëve të vjetër grek (Arkimedi, Apoloni, Euklidi etj.), edhe ata kryesisht i kanë shqyrtuar si prerje të konit me rrafsh. Interesi për studimin detal të tyre veçanërisht ka qenë i zmadhuar pas zbulimit se planetet lëvizin sipas lakoreve (trajektoreve) që paraqesin elipsa (në fillim të shekullit XVII), dhe prej atëherë ka filluar të mësuarit e lakoreve të rendit të dytë me metodat e gjeometrisë analitike.

4.3.1 VIJA RRETHORE. BARAZIMI I VIJËS RRETHORE

Përkufizimin e vijës rrethore nga pikëpamja gjeometrike tani më e ke të njohur, por të përkujtohemi.

Përkufizimi. *Vija rrethore është bashkësi e të gjitha pikave $M(x,y)$ në rrafshin xOy të cilat janë në largësi të barabartë r prej pikës së dhënë $S(p,q)$ në atë rrafsh.*

Me fjalë tjera, vija rrethore K është bashkësia

$$K = \{M(x,y) \mid \overline{SM} = r\} \quad (1)$$

Pikën S e quajmë **qendër**, kurse largësinë r **rreze** të vijës rrethore.

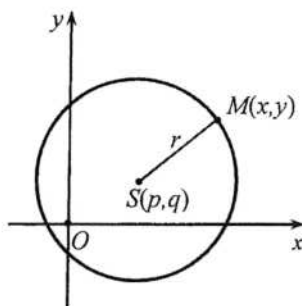


fig.1

Parashatrojmë detyrë, ta caktojmë barazimin e bashkësisë së pikave K të përcaktuar me (1). Prej përkufizimit vijon se për çfarëdo pikë $M(x, y) \in K$ vlen:

$$\overline{SM} = r, \text{ përkatësisht } \overline{SM}^2 = r^2.$$

Duke e shfrytëzuar formulën për largësinë ndërmjet dy pikave, largësinë $\overline{SM}$ e shprehim me koordinatat e pikave $M(x, y)$ dhe $S(p, q)$ dhe barasinë (1) e shkruajmë në formën:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad (2)$$

Barazimi (2) paraqet **barazim të vijës rrethore** me qendër në pikën $S(p, q)$ dhe rreze r , në formën normale. Nëse qendra e vijës rrethore puthitet me fillimin e koordinatave O atëherë $p = q = 0$ (fig.2) dhe barazimi (2) i vijës rrethore e fiton formën:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

dhe quhet **barazimi qendror** i vijës rrethore.

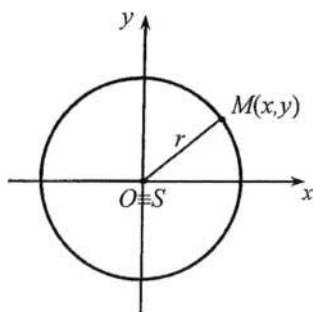


fig.2

➤ **Shembulli 1.** Ta formojmë barazimin e vijës rrethore me rreze $r = 5$ dhe qendër në $S(2, -4)$.

Zgjidhje. Nëse në barazimin (2) zëvendësojmë $r = 5, p = 2, q = -4$, fitojmë $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$ ■

➤ **Shembulli 2.** Barazimi i vijës rrethore me qendër në fillimin e koordinatave dhe rreze 7 do të jetë: $x^2 + y^2 = 49$ ■

Do të tregojmë se, barazimi i vijës rrethore është rast special i barazimit të përgjithshëm prej shkallës së dytë

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4)$$

Me të vërtetë, nëse në barazimin e vijës rrethore (2) i zbërthejmë katrorët e binomëve, fitojmë:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \quad (5)$$

Duke i krahasuar barazimet (4) dhe (5) përfundojmë se, barazimi (4) ndoshta do të paraqet barazimin e vijës rrethore nëse janë plotësuar relacionet

$$A = C \neq 0, B = 0, \quad (6)$$

ku ajo e ka formën

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (7)$$

ose nëse të dy anët i pjesëtojmë me A fitojmë:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0. \quad (8)$$

Vijon, barazimet (5) dhe (7), përkatësisht (8), janë ekuivalente nëse përveç (6) janë plotësuar edhe kushtet:

$$\left. \begin{aligned} -2p &= \frac{D}{A} \Rightarrow p = -\frac{D}{2A} \\ -2q &= \frac{E}{A} \Rightarrow q = -\frac{E}{2A} \\ p^2 + q^2 - r^2 &= \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = p^2 + q^2 - \frac{F}{A} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

prej ku vijon

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{F}{A}} = \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}} = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \frac{1}{2A} \sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}. \quad (10)$$

Domethënë, barazimi (4), me kushtin $A = C \neq 0, B = 0$, gjeometrikisht mund të paraqesë:

- 1° vijë rrethore – nëse $D^2 + E^2 - 4AF > 0$;
- 2° pikë - nëse $D^2 + E^2 - 4AF = 0$;
- 3° asgjë (bashkësi të zbrazët) – nëse $D^2 + E^2 - 4AF < 0$.

Barazimin e vijës rrethore në formën (7) e quajmë **forma e përgjithshme** e barazimit të vijës rrethore.

► **Shembulli 3.** *T'i caktojmë qendrën dhe rrezën e vijës rrethore*

$$4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 9 = 0.$$

Zgjidhje. Së pari të provojmë a është plotësuar kushti se barazimi i dhënë të paraqet vijë rrethore. Për koeficientët e vijës rrethore të dhënë kemi: $A = C = 4, B = 0, D = 80, E = 12, F = 9$, që do të thotë kushti i parë (6) është i kënaqur. Pasi $D^2 + E^2 - 4AF = 80^2 + 12^2 - 4 \cdot 40 \cdot 9 = 6400 + 144 - 1440 > 0$, është i kënaqur edhe kushti i dytë, pra vijon se barazimi i dhënë është barazimi i vijës rrethore. Nëse

koeficientët A, D, E dhe F i zëvendësojmë në relacionin (9) fitojmë: $p = -\frac{80}{2 \cdot 4} = -10, q = -\frac{12}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{2}$,

$r^2 = 100 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 100$, kurse pastaj ato i zëvendësojmë në barazimin (2) dhe e shkruajmë barazimin e

vijës rrethore në formën normale: $(x+10)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = 100$ ■

Vërejtje. Në praktikë, shpeshherë formën e përgjithshme të barazimit të vijës rrethore e sjellim në formën normale ashtu që anëtarin katror dhe linear sipas x dhe y i plotësojmë deri në katror të plotë (këtë transformim e ke të njohur nga viti i kaluar shkollor). Kështu për barazimin e dhënë kemi:

$$4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 20x + 3y + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[x^2 + 20x + \left(\frac{20}{2}\right)^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2] + [y^2 + 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2] + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+10)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - 100 = 0 \text{ d.m.th. } (x+10)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 100 \text{ ■}$$

► **Shembulli 4.** *Ta caktojmë barazimin e vijës rrethore që i prek të dy boshtet e koordinatave dhe kalon nëpër pikën A(2,1).*

Zgjidhje (fig.3). Në këtë rast është e qartë se $p=q=r$, pra me zëvendësimin x, y me koordinatat e pikës A në barazimin e vijës rrethore (2) fitojmë:

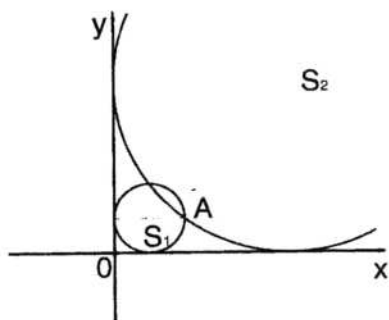


fig.3

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 \Leftrightarrow 4 - 4r + r^2 + 1 - 2r + r^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \quad \text{d.m.th.} \quad r_1 = 1 \text{ dhe } r_2 = 5.$$

Prandaj, fitojmë dy vija rrethore të cilat i kënaqin kushtet e detyrës. Barazimet e tyre janë:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{dhe} \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

► **Shembulli 5.** Ta caktojmë barazimin e vijës rrethore e cila kalon nëpër pikat $A(-1,2)$ dhe $B(6,9)$, kurse qendra është në boshtin x .

Zgjidhje. Pasi qendra S shtrihet në boshtin x , koordinatat e saj janë p dhe 0 , d.m.th. $S(p,0)$, pra barazimi i vijës rrethore do të jetë: $(x-p)^2 + (y-0)^2 = r^2$ d.m.th. $(x-p)^2 + y^2 = r^2$. Duke pasur parasysh atë se vija rrethore kalon nëpër pikat A dhe B , koordinatat e tyre e kënaqin barazimin e vijës rrethore, pra kemi: $(-1-p)^2 + 2^2 = r^2$ dhe $(6-p)^2 + 9^2 = r^2$, prej ku

$$1 + 2p + p^2 + 4 = 36 - 12p + p^2 + 81 \Leftrightarrow 14p = 112 \Leftrightarrow p = 8.$$

Nëse vlerën $p = 8$ e zëvendësojmë në njërin prej barazimeve paraprake e fitojmë edhe rrezin e vijës rrethore r , d.m.th. $r^2 = (-1-8)^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$. Barazimi i vijës rrethore është $(x-8)^2 + y^2 = 85$. ■

► **Shembulli 6.** Ta caktojmë barazimin e vijës rrethore që kalon nëpër pikat $A(2,3)$ dhe $B(-1,1)$, kurse qendra shtrihet në drejtëzën $l: x - 3y - 11 = 0$.

Zgjidhje. Ta shënojmë me K vijën rrethore të kërkuar. Pasi qendra $S(p,q)$ shtrihet në drejtëzën e dhënë kemi: $p - 3q - 11 = 0$. Prej kushtit $A \in K \Rightarrow (2-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$, kurse prej $B \in K \Rightarrow (-1-p)^2 + (1-q)^2 = r^2$. Domethënë, për përcaktimin e p, q dhe r fitojmë sistem barazimesh me tre të panjohura:

$$\begin{cases} p - 3q = 11 \\ p^2 + q^2 - 4p - 6q + 13 = r^2 \\ p^2 + q^2 + 2p - 2q + 2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p - 3q = 11 \\ 6p + 4q = 11 \\ p^2 + q^2 + 2p - 2q + 2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{7}{2} \\ q = -\frac{5}{2} \\ r^2 = \frac{65}{2} \end{cases}$$

Vijon, barazimi i vijës rrethore të kërkuar është: $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{65}{2}$. ■

DETYRA

1. Cilat vija gjeometrike janë paraqitur me këto barazime:

- a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 1$; c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$;
 ç) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; d) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

2. Vizato vijën rrethore dhe shkruaje barazimin e saj, nëse janë:

- a) $p = q = r = 1$; b) $p = q = r = 5$; c) $p = 3, q = 5, r = 3$; ç) $p = q = 0, r = 2$;
 d) $p = -3, q = -3, r = 2$; e) $p = -5, q = 3, r = 2$; f) $p = 3, q = -5, r = 2$.

3. Si është barazimi i vijës rrethore me qendër $S(-4,-2)$ e cila kalon nëpër pikën $A(-4,6)$?
4. Caktoji koordinatat e qendrës dhe rrezes së vijës rrethore, barazimet e të cilave janë:
- a) $x^2 - 10x + y^2 + 12y - 83 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$;
 c) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$; ç) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$.
5. Sjelli në formën normale barazimet e vijave rrethore:
- a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$; c) $144x^2 + 144y^2 - 648x + 960y + 565 = 0$.
6. Si është barazimi i vijës rrethore e cila është koncentrike me vijën rrethore $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$ dhe kalon nëpër pikën $A(-3,4)$?
7. Në barazimin e vijës rrethore $x^2 + y^2 - (k-4)x - ky + 2k + 5 = 0$, caktoje k , ashtu që vija rrethore ta prekë boshtin y .
8. Në barazimin e vijës rrethore $x^2 + y^2 + (k+2)x - (2k-2)y + 2k + 1 = 0$, caktoje k ashtu që vija rrethore t'i prek të dy boshtet koordinative.
9. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila i prek të dy boshtet koordinative dhe drejtëzën $l: 3x + 4y - 5 = 0$ (drejtëza në këtë rast tani më e dinë se quhet tangjenta e vijës rrethore).
10. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila i prek drejtëzat $y + 8 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$.
11. Caktoji pikëprerjet e drejtëzës $x + 3y - 7 = 0$ dhe vijës rrethore $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$
12. Varësisht prej koeficientit k të barazimit $kx - y - 13 = 0$, shqyrtoje natyrën e zgjidhjes së sistemit:
- $$\begin{cases} kx - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \end{cases} . \text{ Cili është interpretimi gjeometrik i zgjidhjes?}$$

4.3.2. POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE VIJËS RRETHORE

Prej të mësuarit e gjertanishëm të gjeometrisë e ke të njohur se drejtëza e dhënë l dhe vija rrethore K mund të kenë një rëndësi prej këtyre tri pozitave reciproke:

1° drejtëza dhe vija rrethore kanë dy pika të përbashkëta, përkatësisht drejtëza e prenë vijën rrethore,

2° drejtëza dhe vija rrethore kanë një pikë të përbashkët, përkatësisht drejtëza e prek vijën rrethore,

3° drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta.

Nëse drejtëza dhe vija rrethore janë dhënë me barazimet e tyre, atëherë mënyra për konstatimin e këtyre raporteve sillehet në zgjidhjen e sistemit prej një barazimi linear dhe një barazimi katror

$$\begin{cases} y = kx + n \\ Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

që tani më e ke të njohur nga viti i dytë. Përkatësisht, shikuar se sistemi mund të ketë: dy zgjidhje reale (drejtëza e prenë vijën rrethore); një zgjidhje (drejtëza dhe vija rrethore kanë një pikë të përbashkët) dhe nuk ka zgjidhje (drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta).

Tani do ta shqyrtojmë pozitën reciproke të drejtëzës dhe vijës rrethore duke shfrytëzuar aparatin e gjeometrisë analitike. Le të jenë dhënë vija rrethore

$$K: (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

dhe drejtëza

$$l: y = kx + n \text{ - në formën eksplicite,}$$

ose

$$kx - y + n = 0 \text{ - në formën e përgjithshme.}$$

Nëse me d e shënojmë largësinë e qendrës $S(p, q)$ të vijës rrethore K deri te drejtëza l të mundshme janë këto tri raste:

a) nëse $d > r$, atëherë $l \cap K = \emptyset$, d.m.th. drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta (fig. 1);

b) anëse $d = r$, atëherë $l \cap K = \{T\}$, d.m.th. drejtëza dhe vija rrethore kanë një pikë të përbashkët (prekëse) T , përkatësisht drejtëza l është tangjentë e vijës rrethore K (fig.2);

c) nëse $d < r$, atëherë $l \cap K = \{M, N\}$, drejtëza dhe vija rrethore kanë dy pika të përbashkëta, d.m.th. drejtëza e prerë vijën rrethore K , dhe themi se l është sekanta e vijës rrethore K (fig.3).

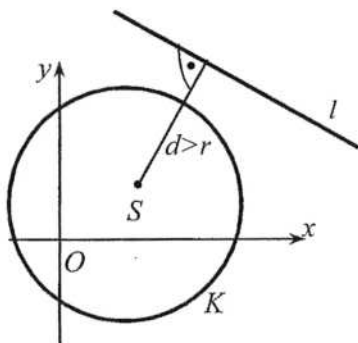


fig. 1

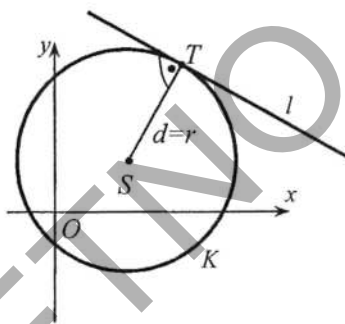


fig. 2

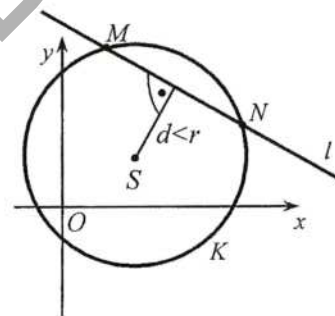


fig. 3

Sipas formulës për largësi prej pikës deri te drejtëza, për largësinë d prej qendrës $S(p, q)$ në vijën rrethore K deri te drejtëza l kemi:

$$d = \frac{|kp - q + n|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (1)$$

pra kushtet më lartë të shprehura për pozitën reciproke të drejtëzës dhe vijës rrethore e fitojë këtë formë analitike:

a) nëse $d > r \Rightarrow |kp - q + n| > r\sqrt{k^2 + 1}$, përkatësisht $(kp - q + n)^2 > r^2(k^2 + 1)$, drejtëza l dhe vija rrethore K nuk kanë pika të përbashkëta;

b) nëse $d = r \Rightarrow |kp - q + n| = r\sqrt{k^2 + 1}$, përkatësisht $(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$, drejtëza l do ta prek vijën rrethore K , dhe atëherë relacioni

$$(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1) \quad (2)$$

do të paraqet **kusht për prekje** të drejtëzës l dhe vijës rrethore K ;

c) nëse $d < r \Rightarrow |kp - q + n| < r\sqrt{k^2 + 1}$, përkatësisht $(kp - q + n)^2 < r^2(k^2 + 1)$, drejtëza l dhe vija rrethore K kanë dy pika të përbashkëta.

Në veçanti, nëse vija rrethore K është me qendër në fillimin e koordinatave, atëherë $p = q = 0$, pra kushtet e sipërme në këtë rast janë:

a) nëse $d > r \Rightarrow n^2 > r^2(k^2 + 1)$, drejtëza l dhe vija rrethore K nuk kanë pika të përbashkëta;

b) nëse $d = r \Rightarrow n^2 = r^2(k^2 + 1)$, drejtëza l e prek vijën rrethore K dhe relacioni

$$r^2(k^2 + 1) = n^2$$

(3)

paraqet kusht për prekjen e drejtëzës l dhe vijës rrethore qendrore K ;

c) nëse $d < r \Rightarrow n^2 < r^2(k^2 + 1)$, drejtëza l dhe vija rrethore K kanë pika të përbashkëta.

➤ **Shembulli 1.** Ta shqyrtojmë pozitën reciproke të drejtëzës $l: x + y + 5 = 0$ dhe vijës rrethore $K: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Zgjidhje. Vja rrethore është me qendër në pikën $S(1, 2)$ dhe rreze $r = 5$. Largësia d prej qendrës $S(1, 2)$ deri te drejtëza është:

$$d = \frac{|1 + 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \quad d^2 = 32$$

Pasi $d^2 = 32 > 25 = r^2$ vijon $d > r$, d.m.th. drejtëza l dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta.

Vërejtje. Deri te përfundimi i njëte do të arrijmë edhe nëse e shqyrtojmë zgjidhjen e sistemit të barazimeve:

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 5 \\ (x - 1)^2 + (-x - 5 - 2)^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 5 \\ 2x^2 + 12x + 25 = 0 \end{cases}$$

Diskriminanta D e barazimit katror është: $D = 144 - 200 = -56 < 0$, pra vijon se sistemi nuk ka zgjidhje reale, d.m.th. drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta. ■

➤ **Shembulli 2.** Ta shqyrtojmë pozitën reciproke të drejtëzës $l: x - y + 2 = 0$ dhe vijës rrethore $K: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0$.

Zgjidhje. Koordinatat e qendrës dhe rrezës së vijës rrethore janë:

$p = 1, q = 4, r^2 = 15$. Për largësinë prej qendrës deri te drejtëza kemi: $d = \frac{|1 - 4 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vijon:

$d^2 = \frac{1}{2} < 15 = r^2$, d.m.th. $d < r$, që do të thotë se drejtëza e prentë vijën rrethore. Le të jetë $l \cap K = \{M, N\}$. T'i caktojmë koordinatat e pikëprerjeve M dhe N . Kemi:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + (x + 2)^2 - 2x - 8(x + 2) + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vijon, pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore janë $M(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \frac{7+\sqrt{29}}{2})$ dhe $N(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, \frac{7-\sqrt{29}}{2})$. ■

➤ **Shembulli 3.** Për drejtëzën $l: y = kx$ t'i caktojmë vlerat e parametrin k ashtu që ajo:

- e prenë vijën rrethore $K: x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0$;
- e prek vijën rrethore;
- nuk ka pika të përbashkëta me vijën rrethore.

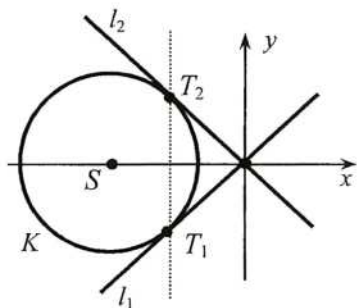


fig.4

Zgjidhje. Koordinatat e qendrës së vijës rrethore janë $p = -5, q = 0$ dhe $r^2 = 9$. Largësia d prej qendrës së vijës rrethore deri te drejtëza është:

$$d = \frac{|k \cdot (-5) - 0|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \text{ ose } d^2 = \frac{25k^2}{k^2 + 1}.$$

- kushti $d < r$, përkatësisht $d^2 < r^2$ plotësohet nëse $\frac{25k^2}{k^2 + 1} < 9 \Leftrightarrow 25k^2 < 9k^2 + 9 \Leftrightarrow 16k^2 < 9 \Leftrightarrow |k| < \frac{3}{4}$. Domethënë, drejtëza e prenë vijën rrethore për të gjitha vlerat e k ashtu që: $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$.

- Ngjashëm sikurse nën a), prej kushtit $d = r$, fitojmë $k = \pm \frac{3}{4}$. Domethënë, kemi dy drejtëza që e prekin vijën rrethore: $l_1: y = \frac{3}{4}x$ dhe $l_2: y = -\frac{3}{4}x$. Pikat prekëse $T_1 = l_1 \cap K$, $T_2 = l_2 \cap K$ do t'i caktojmë si zgjidhje të sistemeve:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0 \end{cases} \text{ dhe } \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0 \end{cases}$$

përkatësisht, prej ku fitojmë:

$$T_1(-\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}) \text{ dhe } T_2(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5}) \text{ (fig.4).}$$

- Për $|k| > \frac{3}{4}$, d.m.th. $k < -\frac{3}{4}$ ose $k > \frac{3}{4}$, drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta. ■

➤ **Shembulli 4.** Ta caktojmë pozitën reciproke të drejtëzës $l: x - y + 10 = 0$ dhe vijës rrethore $K: x^2 + y^2 = 1$.

Zgjidhje. Ta zgjidhim sistemin e barazimeve:

$$\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 10 \\ 2x^2 + 20x + 99 = 0 \end{cases}$$

Pasi diskriminanta e barazimit katror $2x^2 + 20x + 99 = 0$ është $D = -392 < 0$, përfundojmë se drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta. ■

➤ **Shembulli 5.** Ta caktojmë ordinatën q të qendrës S të vijës rrethore $(K): (x-5)^2 + (y-q)^2 = 20$, ashtu që vija rrethore e prek drejtëzën $(l): x - 2y + 1 = 0$.

Zgjidhje. Do ta shfrytëzojmë kushtin (2) për prekje të drejtëzës dhe vijës rrethore. Prej barazimeve të drejtëzës dhe vijës rrethore gjejmë: $k = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$; qendra e vijës rrethore është në pikën $S(5, q)$ dhe $r^2 = 20$. Tani, prej kushtit për prekje kemi: $(\frac{5}{2} - q + \frac{1}{2})^2 = 20(\frac{1}{4} + 1) \Leftrightarrow (3 - q)^2 = 25$, prej ku fitojmë $q_1 = 8$ dhe $q_2 = -2$. Domethënë, ekzistojnë dy vija rrethore të cilat e kënaqin kushtin e dhënë:

$$K_1: (x-5)^2 + (y-8)^2 = 20 \text{ dhe } K_2: (x-5)^2 + (y+2)^2 = 20.$$

Përpiku rezultatin ta tregosh në sistemin koordinativ. ■

DETYRA

1. Caktoji pikëprerjet e drejtëzës l dhe vijës rrethore K :
a) $l: 2x - y + 2 = 0, K: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$; b) $l: x - y - 1 = 0, K: (x-2)^2 + y^2 = 16$.
2. Caktoji pikëprerjet e drejtëzës l të përcaktuar me pikat $A(0,1), B(-2,0)$ dhe vijës rrethore $K: x^2 + y^2 = 4$.
3. Shkruaje barazimin e vijës rrethore K , e cila kalon nëpër pikat $A(0,6), B(0,10)$ dhe e prek drejtëzën $x = 4$.
4. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila i prek boshtet koordinative dhe drejtëzën $3x + 4y - 5 = 0$.
5. Si është barazimi i vijës rrethore K , e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave, e prek drejtëzën $l: 5x - 12y - 26 = 0$, kurse qendra S shtrihet në boshtin x ?
6. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila i prek brinjët e trekëndëshit barazimet e të cilëve janë $2x - y - 5 = 0, 2x - y - 10 = 0$ dhe $x - 2y - 7 = 0$.
7. Caktoje barazimin e vijës rrethore K , e cila i prek drejtëzat $l_1: 3x - 4y + 8 = 0, l_2: 12x + 5y - 6 = 0$, kurse qendra është në drejtëzën $x + y - 2 = 0$.
8. Caktoje barazimin e vijës rrethore K , e cila kalon nëpër pikën $M(6,8)$ dhe e pret drejtëzën $(l): 4x + 3y + 1 = 0$ në pikën D me abshisën -1 .
9. Caktoje parametrin m , ashtu që drejtëza $x + 3y + m = 0$: a) e prek; b) nuk ka pika të përbashkëta dhe c) ka dy pika të përbashkëta me vijën rrethore $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$.
10. Caktoje parametrin a të drejtëzës $l: ax + 3y - 6 = 0$ e cila e prek vijën rrethore $K: x^2 + y^2 - 4 = 0$.
11. Formo barazimin e vijës rrethore K , e cila është koncentrike me vijën rrethore $K: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ dhe e prek drejtëzën $l: 3x - 4y + 7 = 0$.

4.3.3. BARAZIMI I TANGJENTËS DHE NORMALES NË PIKËN E VIJËS RRETHORE

Në pikën paraprake e shqyrtuam rastin kur drejtëza l e prek vijën rrethore të dhënë K në një pikë të saj M , të cilën e quajmë **pikë prekëse**. Nga gjeometria e dijmë se tangjenta t_M në pikën e dhënë M prej vijës rrethore është normale në drejtëzën që kalon nëpër qendrën S të vijës rrethore dhe pikës M , d.m.th. $t_M \perp SM$ (fig.1). Në bazë të këtyre fakteve do ta caktojmë barazimin e tangjentës në pikën e dhënë M prej vijës rrethore.

Le të jenë dhënë vija rrethore K me barazimin në formën normale

$$K: (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \quad (1)$$

dhe pika $M(x_1, y_1) \in K$. Drejtëza nëpër qendrën e vijës rrethore $S(p, q)$ dhe $M(x_1, y_1)$ e ka barazimin:

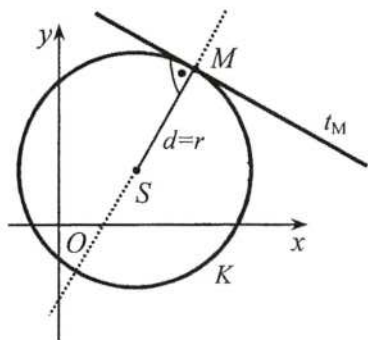


fig.1

$$SM: y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1).$$

Prej kushtit $t_M \perp SM$, e gjejmë koeficientin e drejtimit të tangjentës k_t , d.m.th.

$$k_t = -\frac{1}{\frac{y_1 - q}{x_1 - p}} = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$$

pra barazimi i tangjentës është:

$$t_M: y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1)$$

ose

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) = 0 \quad (2)$$

do ta transformojmë barazimin (2) në formë të përshtatshme për të mbajtur mend dhe zbatim. Pasi $M(x_1, y_1) \in K$, vlen:

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2. \quad (3)$$

Nëse i mbledhim barazimet (2) dhe (3), pas rregullimit, fitojmë:

$$\begin{aligned} (x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) + (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 &= r^2 \Leftrightarrow \\ (x_1 - p)[x - x_1 + x_1 - p] + (y_1 - q)[y - y_1 + y_1 - q] &= r^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2} \quad (4)$$

Barazimi (4) është barazimi i tangjentës së vijës rrethore në pikën $M(x_1, y_1) \in K$.

Në veçanti, nëse K është qendra e vijës rrethore, d.m.th. $K: x^2 + y^2 = r^2$, atëherë $p = q = 0$, dhe barazimi i tangjentës (4) e merr formën:

$$\boxed{x_1 x + y_1 y = r^2} \quad (5)$$

➤ **Shembulli 1.** Ta shkruajmë barazimin e tangjentës së vijës rrethore $K: x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$, në pikën $T(1, y > 0) (T \in K)$.

Zgjidhje. Së pari e përcaktojmë ordinatën e pikës T prej kushtit $T \in K$:

$1^2 + y^2 + 2 \cdot 1 - 19 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 4$. Për shkak të kushtit $y > 0$, e marrim vetëm zgjidhjen $y = 4$, pra vijon se pika prekëse është $T(1,4)$. Tani barazimin e vijës rrethore K e sjellim në formën normale

$(x+1)^2 + y^2 = 20$, prej të cilit, në pajtim me barazimin (4), e fitojmë barazimin e tangjentës së kërkuar:

$$(1+1)(x+1) + (4-0)(y-4) = 20 \quad \text{ose} \quad t_T: x + 2y - 17 = 0 \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Në prerjen e drejtëzës $l: 7x + y - 25 = 0$ dhe vijës rrethore $x^2 + y^2 = 25$ janë konstruktuar tangjentet. T'i shkruajmë barazimet e tyre.

Zgjidhje. Pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore janë zgjidhjet e sistemit të barazimeve:

$$\begin{cases} 7x + y - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 3 \\ y_1 = -3, y_2 = 4 \end{cases} \quad \text{Vijon, pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore janë:}$$

$T_1(4, -3), T_2(3, 4)$, pra barazimet e tangjenteve do të jenë $t_1: 4x - 3y - 25 = 0$ dhe $t_2: 3x + 4y - 25 = 0$.

Shqyrto si është pozita reciproke e të dy tangjenteve. ■

➤ **Shembulli 3.** Prej pikës $M(1,6)$ janë konstruktuar tangjentet e vijës rrethore $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. T'i caktojmë barazimet e tangjenteve.

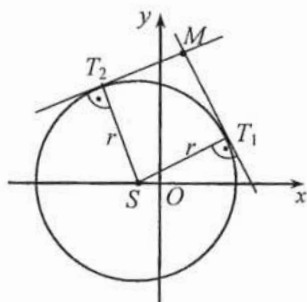


fig.2

Zgjidhje. Dihet se prej një pike të jashtme M të vijës rrethore K mund të konstruktohen dy tangjente (fig. 1). Me plotësimin deri në katror të plotë e shkruajmë barazimin e vijës rrethore në formën normale $K: (x+1)^2 + y^2 = 20$, për të cilën $S(-1,0)$ dhe $r^2 = 20$. Barazimi i tangjentës le të jetë

$$t: y = kx + n. \quad (1)$$

në të cilën duhet t'i caktojmë koeficientët k dhe n .

Pasi $M \in t$ koordinatat e saj e kënaqin barazimin (1), d.m.th. kemi:

$$6 = k + n. \quad (2)$$

Kushti për prekje (shih (2) prej 4.3.3) të drejtëzës (1) dhe vijës rrethore K në rastin e dhënë është

$$(k \cdot (-1) - 0 + n)^2 = 20(k^2 + 1), \text{ përkatësisht } (-k + n)^2 = 20k^2 + 20 \text{ ose}$$

$$19k^2 + 2kn - n^2 + 20 = 0. \quad (3)$$

Domethënë, për caktimin e k dhe n e kemi sistemin e barazimeve:

$$\begin{cases} k + n = 6 \\ 19k^2 + 2kn - n^2 + 20 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

zgjidhjet e të cilave janë: $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -2$ dhe $n_1 = \frac{11}{2}, n_2 = 8$. Me zëvendësimin në (1) i fitojmë

tangjentet: $t_1: x - 2y + 11 = 0$ dhe $t_2: 2x + y - 8 = 0$ ■

Para se ta zgjidhim shembullin që vijon të përkujtohem në përkufizimin për normalen e vijës rrethore: Normalja e vijës rrethore në pikën e dhënë prej saj është drejtëza që është normale në tangjentën e vijës rrethore në pikën e dhënë.

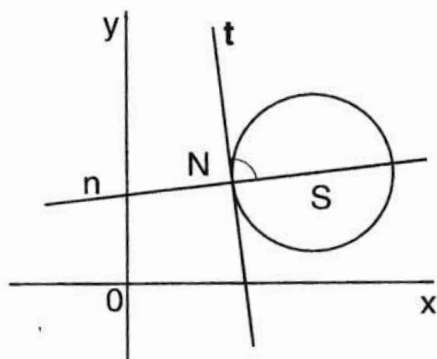


fig.3

➤ **Shembulli 4.** Nëpër pikën $N(2,3)$, të tërheqim normale në vijën rrethore $K: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

Zgjidhje. Së pari të provojmë se pika $N(2,3)$ a i takon vijës rrethore. Pasi

$$2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 1 = 20 \neq 0$$

vijon se pika N nuk është në vijën rrethore (fig. 3). Prej përkufizimit për normalen e vijës rrethore vijon se normalja patjetër duhet të kalon nëpër qendrën e vijës rrethore (pse?).

Barazimi i vijës rrethore K në formën normale është $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$ prej ku gjejmë $S(1, -2)$, $r^2 = 6$. Barazimin e normales n do ta caktojmë si barazim të drejtëzës nëpër dy pika N dhe S $[N(2,3), S(1, -2)]$. Vijon $n: y + 2 = \frac{3+2}{2-1}(x-1)$ d.m.th. $5x - y - 7 = 0$ ■

➤ **Shembulli 5.** Të caktojmë nën cilin kënd shihet vija rrethore $K: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ prej pikës $M(3,6)$?

Zgjidhje. Këndi i kërkuar është këndi ndërmjet tangjenteve të konstruara prej pikës $M \notin K$ deri te vija rrethore K (shihje zgjidhjen e shembullit 3). Barazimi i tangjentës le të jetë $l: y = kx + n$. Prej kushtit $M \in l$, fitojmë $6 = 3k + n$, kurse prej kushtit për prekje të drejtëzës l dhe vijës rrethore K kemi: $(2k - 1 + n)^2 = 13(k^2 + 1)$. Domethënë që t'i caktojmë k dhe n , e fitojmë sistemin

$$\begin{cases} 3k + n = 6 \\ (2k - 1 + n)^2 = 13(k^2 + 1) \end{cases} \text{ Pasi e zgjidhim sistemin e sipërm i caktojmë tangjentet: } t_1: 2x - 3y + 12 = 0 \text{ dhe}$$

$$t_2: 3x + 2y - 21 = 0. \text{ Koeficientet e drejtimit të tangjenteve } t_1 \text{ dhe } t_2 \text{ janë } k_1 = \frac{2}{3} \text{ dhe } k_2 = -\frac{3}{2} \text{ përkatësisht. Pasi}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \text{ vijon } t_1 \perp t_2. \text{ Domethënë, prej pikës } M \text{ vija rrethore shikohet nën këndin e drejtë.} \blacksquare$$

DETYRA

1. Shkruaje barazimin e tangjentës në pikën T prej vijës rrethore K nëse është:

a) $K: x^2 + (y-2)^2 = 5, T(2,3)$; b) $K: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10, T(-2, y > 0)$;

c) $K: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 1, T(x > 0; 1)$.

2. Shkruaje barazimin e tangjentës në pikën T prej vijës rrethore K , nëse është:

a) $K: x^2 + y^2 = 5, D(2,1)$; b) $K: x^2 + y^2 = 10, T(-3,1)$;

c) $K: x^2 + y^2 = 20, D(4, y < 0)$; d) $K: x^2 + y^2 = 18, D(x < 0, 3)$.

3. Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $K: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$ në pikën prekëse $T(4, y > 5)$.

4. Caktoji kulmet e trekëndëshit, në të cilin është brendashkruar vija rrethore $K: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$, nëse pikat prekëse janë, $D_1(4,2)$, $D_2(-2,2)$ dhe $D_3(2,-2)$.
5. Çfarë këndi formon tangjenta e vijës rrethore $K: x^2 + y^2 = 5$, e tërhequr prej pikës $T(2,1)$, me drejtëzën e përcaktuar me pikat $A(2,3)$ dhe $B(-1,-6)$?
6. Caktoje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $K: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, normale në drejtëzën $x - 2y + 9 = 0$.
7. Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $K: x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, paralele me drejtëzën $2x + y - 7 = 0$.

4.3.4. ELIPSA. BARAZIMI QENDROR I ELIPSËS

1. Konceptin elipsë e ke të njohur nga gjeometria, gjeografia, fizika etj. Kjo lakore është me rëndësi të madhe praktike në shumë disiplina, nga arti deri në astronomi. Për shembull, objekt rrethor i shikuar nga perspektiva paraqet elipsë, satelitë natyrorë dhe artificial lëvizin nëpër shtigjet eliptike. Prej atje rrjedh edhe nevoja për studimin detal të saj.

Përkufizimi gjeometrik i elipsës është ky.

Përkufizimi. Elipsa është bashkësi e të gjitha pikave $M(x,y)$ në rrafsh të atilla që shuma prej largësive deri te dy pika fikse F_1 dhe F_2 nga rrafshi i njëjtë është konstant.

Pikat F_1 dhe F_2 quhen pika fokale ose **focusë të elipsës**, kurse mesi C i segmentit F_1F_2 - **qendra e elipsës**. Domethënë, elipsa është bashkësia

$$E = \{M(x,y) \mid \overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a\}$$

Këtë përkufizim për elipsën mund ta vërtetojmë me provë me një mënyrë shumë praktike të thjeshtë e ilustruar në fig.1.

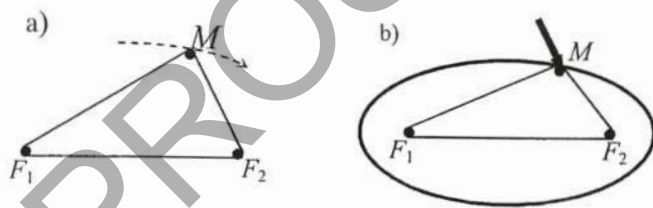


fig.1

Zgjedhim dy pika fikse F_1 dhe F_2 dhe rreth tyre mbështjellim pe me gjatësi l , ashtu që peri të mos jetë i shtërnguar, përkatësisht $l > 2 \cdot \overline{F_1F_2}$. Me majën e lapsit e tërheqim perin deri te pika M , kurse pastaj e tërheqim nëpër rrafsh duke e mbajtur perin të shtërnguar. Në këtë

mënyrë do ta vizatojmë elipsën (fig. 1b), ku për çfarëdo pikë M vlen:

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} + \overline{F_1F_2} = l \quad \text{ose} \quad \overline{MF_1} + \overline{MF_2} = l - \overline{F_1F_2}.$$

Domethënë, nëse pika M lëviz nëpër elipsën shuma $\overline{MF_1} + \overline{MF_2}$ gjithmonë ka vlerë konstante $l - \overline{F_1F_2}$.

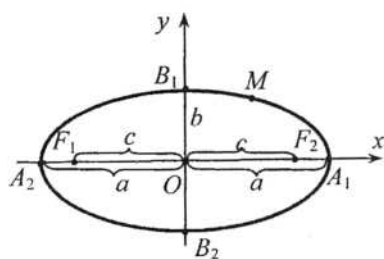


fig.2

Për ta shqyrtuar elipsën dhe ta përcaktojmë barazimin e saj në formë më të thjeshtë, më e përshtatshme është ta shqyrtojmë në sistemin kënddrejtë koordinativ të zgjedhur për të cilin fillimi i koordinatave është në qendrën C të elipsës, kurse boshti x kalon nëpër fokusët F_1 dhe F_2 (fig.2). Nëse largësitë prej qendrës O deri te njëri dhe tjetri fokus është c , atëherë $F_1(-c,0)$ dhe $F_2(c,0)$. Pikëprerjet e elipsës me boshtet koordinative janë **kulme të elipsës**: A_1, A_2 me boshtin x dhe B_1, B_2 me boshtin y .

Segmenti A_1A_2 quhet **boshti i madh**, kurse segmenti B_1B_2 **boshti i vogël** për elipsën. Vërejmë se, sipas përcaktimeve të sipërme, elipsa është simetrike sikurse në lidhje me boshtin e madh, ashtu edhe në lidhje me boshtin e vogël. Gjatësia e boshtit të madh le të jetë $2a$ ($a > c$), kurse gjatësia e boshtit të vogël $2b$, d.m.th. $\overline{A_1A_2} = 2a$, $\overline{B_1B_2} = 2b$.

Numrin a e quajmë **gjysmëboshti i madh**, kurse b **gjysmëboshti i vogël** për elipsën.

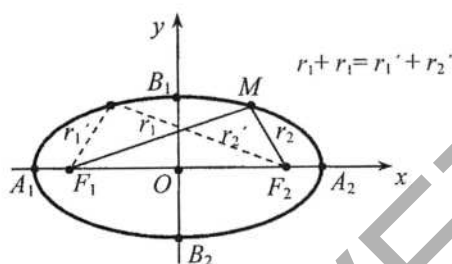


fig.3

Largësia e pikave $M \in E$ deri te fokusët, $\overline{MF_1} = r_1$ dhe $\overline{MF_2} = r_2$, i quajmë **rreze fokale** për pikën M (fig.3). Do të tregojmë se për çfarëdo pikë $M(x,y) \in E$, vlen

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a \quad (1)$$

Me të vërtetë, nëse pika M lëviz nëpër elipsë, sipas përkufizimit, shuma $\overline{MF_1} + \overline{MF_2}$ nuk ndryshon që do të thotë se ajo është e njëjtë edhe për pikat A_1 dhe B_1 d.m.th. vlen:

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{B_1F_1} + \overline{B_1F_2} \quad (2)$$

Për shkak të simetrisë të F_1 dhe F_2 në lidhje me C , kemi

$$\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} \quad (3)$$

pas zëvendësimit në (2) gjejmë:

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = 2 \cdot \overline{B_1F_2} \quad (4)$$

Por, gjithashtu (për shkak të simetrisë) vlen

$$\overline{A_1F_2} = \overline{A_2F_1}$$

Pra atëherë prej (4) fitojmë:

$$2 \cdot \overline{B_1F_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{A_2F_1} = \overline{A_1A_2} = 2a$$

prej ku vijon

$$\overline{B_1F_2} = a \quad (5)$$

Tani, duke e zbatuar teoremën e Pitagorës për trekëndëshin B_1CF_2 gjejmë:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (6)$$

2. Ta caktojmë barazimin e elipsës. Prej tërë asaj që është theksuar sipër vijon se për çfarëdo pikë $M(x, y)$ prej elipsës vlen:

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a \quad (7)$$

Duke e shfrytëzuar formulën për largësi ndërmjet dy pikave barasinë e fundit e shkruajmë në formën:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (8)$$

Barazimi (8) është barazimi i elipsës në sistemin koordinativ të zgjedhur, por ajo formë nuk është e përshtatshme për zbatim praktik, prandaj barazimin (2) do ta sjellim në formën më të përshtatshme për zbatim.

Për këtë qëllim, së pari barazimin (2) mund ta shkruajmë në formën ekuivalente:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Pas kuadrimit të të dy anëve dhe pas rregullimit fitojmë:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

por duke kuadruar dhe rregulluar përsëri, fitojmë:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Pasi $a^2 = c^2 + b^2$, përkatësisht $a^2 - c^2 = b^2$, barasia e fundit e merr formën

$$\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2} \quad (9)$$

Nëse të dy anët e barazimit (9) i pjesëtojmë me $a^2b^2 \neq 0$, e fitojmë barazimin:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (10)$$

Barazimi (9), përkatësisht (10), është forma më e thjeshtë e elipsës dhe e quajmë **barazimi qendror** ose **kanonik i elipsës**.

Pasi të dy ndryshoret janë të fuqizuara vetëm me shkallë çift, prej barazimit të elipsës (10) drejtpërdrejt vijon simetria e saj në lidhje me fillimin e koordinatave dhe boshteve koordinative.

Kështu, nëse pika $M(x, y) \in E$, vijon se pikat $M_1(-x, -y)$, $M_2(-x, y)$ dhe $M_3(x, -y)$ gjithashtu i takojnë elipsës E .

Për shembull, pika $M(3, 2)$ shtrihet në elipsë $E: 8x^2 + 18y^2 = 144$, pasi $8 \cdot 9 + 18 \cdot 4 = 144$, prej ku menjëherë vijon se edhe pikat $M_1(-3, -2)$, $M_2(-3, 2)$, $M_3(3, -2)$ gjithashtu shtrihen në elipsë.

Pasi kulmet e elipsës janë pikëprerjet e elipsës me boshtet koordinative, koordinatat e tyre i fitojmë si zgjidhje të sistemit të barazimeve: $y=0$, $b^2x^2 + a^2 \cdot 0 = a^2b^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$, pra $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$; gjithashtu, për $x=0$, $b^2 \cdot 0 + a^2x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b$, pra $B_1(b, 0)$ dhe $B_2(-b, 0)$.

Vërejtje. Për numrat a dhe b në barazimin (10), është e qartë se sipas (6), vlen $a > b$. Nëse fokusët e elipsës janë në boshtin y , atëherë vlen $b > a$ (fig.5)

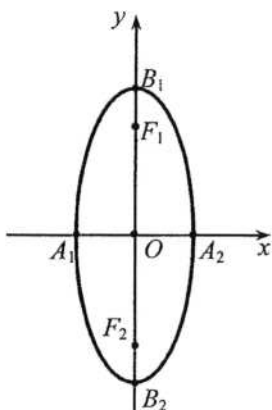


fig.5

Nëse prej barazimeve të elipsës (9) dhe (10) e shprehim y nëpërmjet x , fitojmë:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (11)$$

Prej barazimit (11) vijon kushti $a^2 - x^2 \geq 0$, përkatësisht $x^2 \leq a^2$ d.m.th. $-a \leq x \leq a$. Domethënë $x \in [-a, a]$.

Anasjelltas, nëse barazimin (9) e zgjidhim sipas x :

$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$, fitojmë se $y \in [-b, b]$. Vijnë se pikat prej elipsës gjenden në drejtkëndësh të kufizuar me drejtëzat: $x = \pm a$ dhe $y = \pm b$.

➤ **Shembulli 1.** T'i caktojmë boshtet, kulmet dhe fokusët e elipsës

$$E: x^2 + 4y^2 = 16.$$

Zgjidhje. Barazimin e elipsës E e sjellim në formën normale, d.m.th. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, prej ku $a^2 = 16$ dhe $b^2 = 4$, domethënë boshti i madh është $2a = 8$, kurse boshti i vogël është $2b = 4$, ndërsa kulmet janë në pikat: $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, 2)$ dhe $B_2(0, -2)$. Koordinatat e fokusëve i gjejmë prej kushtit: $a^2 = c^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, prej ku fitojmë: $c = \pm \sqrt{16 - 4} = \pm 2\sqrt{3}$, pra $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ dhe $F_2(2\sqrt{3}, 0)$ ■

➤ **Shembulli 2.** Të formojmë barazim të elipsës nëse janë dhënë gjysmëboshti $a = 5$ dhe largësia e fokusëve deri te qendra e elipsës $c = 3$.

Zgjidhje. Është e nevojshme ta caktojmë gjysmëboshtin b . Pasi $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ barazimi i elipsës është: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ■

➤ **Shembulli 3.** Të formojmë barazimin e elipsës, nëse dihet se $a + b = 25$ dhe $c = 5$.

Zgjidhje. Duhet t'i caktojmë gjysmëboshtet a dhe b . Prej sistemit

$$\begin{cases} a + b = 25 \\ \sqrt{a^2 - b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 25 \\ a^2 - b^2 = 25 \end{cases}$$

fitojmë $a = 13$, $b = 12$, pra barazimi i elipsës është: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ ■

➤ **Shembulli 4.** Në elipsën $E: 4x^2 + 25y^2 = 100$, të caktojmë pikë abshisa e së cilës është -3 .

Zgjidhje. Me zëvendësimin e drejtpërdrejt në barazimin e elipsës, fitojmë:

$$4(-3)^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = \frac{64}{25}, \text{ d.m.th. } y = \pm \frac{8}{5}.$$

Domethënë, fitojmë dy pika $M_1(-3, \frac{8}{5})$ dhe $M_2(-3, -\frac{8}{5})$, të cilat janë simetrike në lidhje me boshtin x .

Vërejtje. Herësi i largësive fokale $2c$ dhe boshtit të madh $2a$, quhet **ekscentriciteti numerik** d.m.th. $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ dhe pasi $c < a$, vijon $\varepsilon < 1$. Nëse $\varepsilon = 0$, atëherë $c = 0$, pra $b = a$, edhe në atë rast barazimi (4) kalon në $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ose $x^2 + y^2 = a^2$ që paraqet barazimin e vijës rrethore. Domethënë, vija rrethore është rast special i elipsës me ekscentricitet numerik zero, d.m.th. $a = b$.

➤ **Shembulli 5.** Është dhënë barazimi i elipsës $E: 9x^2 + 36y^2 = 324$. Ta caktojmë gjatësinë e kordës që kalon nëpër fokusin $F_2(c, 0)$ dhe është paralele me boshtin e ordinatës.

Zgjidhje. Korda e cila kalon nëpër $F_2(c, 0)$, e prenë elipsën në pikat $P_1(c, y_0)$ dhe $P_2(c, -y_0)$ (fig. 6). Ordinaten y_0 do ta caktojmë prej barazimit: $E: y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

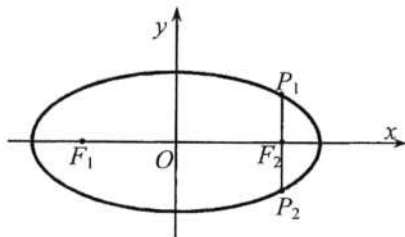


fig.4

Pikat P_1 dhe P_2 shtrihen në elipsë, prandaj

$$y_0 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{b}{a} b = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Atëherë pikat e skajshme të kërkuara të kordës janë:

$P_1(c, \frac{b^2}{a})$, $P_2(c, -\frac{b^2}{a})$, kurse gjatësia e segmentit është

$$\overline{P_1P_2} = 2p, \text{ d.m.th. } \boxed{2p = \frac{2b^2}{a}}.$$

Kjo gjatësi quhet **parametri i elipsës**, kurse $\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$ është **gjysmëparametri**.

Për elipsën e dhënë fitojmë $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ dhe $p = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ■

DETYRA

- Formo barazimin e elipsës nëse dihet se $2a = 30$ dhe $2c = 18$.
- Formo barazimin e elipsës nëse është dhënë $a + b = 9$ dhe $2c = 6$.
- Formo barazimin e elipsës, nëse largësia fokale është 8, kurse gjysmëboshti i vogël 3.
- Formo barazimin e elipsës nëse është dhënë ekscentriciteti numerik $\varepsilon = \frac{1}{3}$ dhe gjysmëboshti i vogël $b = 4$.
- Si është barazimi i elipsës, nëse janë: a) $a - b = 3, \varepsilon = \frac{3}{5}$; b) $a + b =, \varepsilon = \frac{4}{5}$.
- Shkruaje barazimin e elipsës që kalon nëpër pikat: a) $M(2, 0)$, $N(1, 2)$; b) $M(4, \frac{9}{5})$, $N(\frac{5\sqrt{5}}{3}, 2)$.

7. Caktoje ekscentricitetin numerik dhe parametrin e elipsës $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$.
8. Caktoji koordinatat e kulmeve të elipsës, nëse është dhënë $a - c = 6$ dhe $b = 12$.
9. Caktoje pozitën e pikës M dhe elipsën E, nëse:
 - a) $M(2,2)$, $E: 5x^2 + 20y^2 = 10$; b) $M(1,6)$, $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$; c) $M(1,-1)$, $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$.
10. Njehso syprinën e katërkëndëshit kulmet e të cilit janë fokusët dhe skajet e gjysmëboshtit të vogël të elipsës $E: 9x^2 + 25y^2 = 225$.
11. Si është barazimi i elipsës E, nëse gjysmëboshti i vogël prej fokusëve shikohet nën këndin e drejtë dhe nëse është $a = \sqrt{6}$?
12. Rreth elipsës është jashtëshkruar drejtkëndëshi brinjët e të cilit janë paralele me boshtet e elipsës. Caktoji koordinatat e kulmeve të drejtkëndëshit.
13. Caktoji pikëprerjet e drejtëzës $l: 2x - y - 6 = 0$ dhe elipsës $E: 4x^2 + 9y^2 = 324$.

4.3.5. POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE ELIPSËS

Pozita e drejtëzës $l: y = kx + n$ në lidhje me elipsën $E: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ caktohet varësisht prej zgjidhjeve të sistemit të barazimeve:

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx + n \\ (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2(n^2 - b^2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Diskriminanta e barazimit katror është $D = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - n^2)$ dhe prej tij varet se si janë zgjidhjet e barazimit katror, kurse me të edhe zgjidhjet e sistemit (1). Megjithatë të mundshme janë këto tri raste: $D > 0$, $D = 0$ dhe $D < 0$. Pasi $4a^2b^2 > 0$, shenja e D varet vetëm prej shenjës së shprehjes

$$a^2k^2 + b^2 - n^2, \quad (2)$$

pra vijon:

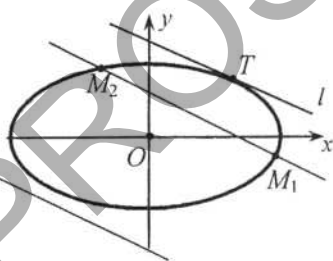


fig.1

1° nëse $D > 0$ d.m.th. $a^2k^2 + b^2 > n^2$, barazimi katror ka dy zgjidhje, domethënë drejtëza l e prenë elipsën në dy pika, d.m.th. $l \cap E = \{M_1, M_2\}$.

2° nëse $D = 0$ d.m.th. $a^2k^2 + b^2 = n^2$, atëherë barazimi l dhe elipsa E kanë një pikë të përbashkët, d.m.th. $l \cap E = \{T\}$, kurse relacioni

$$\boxed{a^2k^2 + b^2 = n^2} \quad (3)$$

paraqet kusht për prekje të drejtëzës l dhe elipsës E.

3° nëse $D < 0$ d.m.th. $a^2k^2 + b^2 < n^2$, atëherë drejtëza l dhe elipsa E nuk kanë pika të përbashkëta, d.m.th. $l \cap E = \emptyset$.

➤ **Shembulli 1.** Janë dhënë drejtëza $l: 3x - y + 2 = 0$ dhe elipsa $E: 4x^2 + 16y^2 = 64$. Si është pozita e tyre reciproke?

Zgjidhje. Barazimin e elipsës e sjellim në formën $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, prej ku $a = 4, b = 2$, kurse prej barazimit të drejtëzës $y = 3x + 2$ kemi $k = 3, n = 2$ dhe me zëvendësimin në barasinë (3) fitojmë $16 \cdot 9 + 4 > 4$, dmthënë drejtëza l e prenë elipsën E në dy pika, d.m.th. $l \cap E = \{M_1, M_2\}$. Koordinatat e M_1 dhe M_2 i gjejmë si zgjidhje të sistemit të barazimeve:

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 4x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ 37x^2 + 48x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2, y_2 = -\frac{70}{37} \\ x_1 = 0, x_2 = -\frac{48}{37} \end{cases}. \text{ Domethënë } M_1(0, 2) \text{ dhe } M_2(-\frac{48}{37}, -\frac{70}{37}). \blacksquare$$

➤ **Shembulli 2.** Është dhënë drejtëza $(l): x + y - n = 0$ dhe elipsa $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$. Ta caktojmë n ashtu që drejtëza l ta prek elipsën E .

Zgjidhje. Prej barazimit të elipsës E fitojmë se $a^2 = 16, b^2 = 9$, kurse prej barazimit të drejtëzës (l) kemi $k = -1$, pra atëherë me zëvendësimin në barasinë (3) fitojmë

$$16(-1)^2 + 9 = n^2 \quad \text{d.m.th.} \quad n = \pm 5.$$

Barazimi i drejtëzës është $x + y \pm 5 = 0$ ■

➤ **Shembulli 3.** Për cilat vlera të koeficientit k drejtëza $l: kx - y + 11 = 0$ dhe elipsa $E: 7x^2 + 9y^2 = 1$, nuk kanë pika të përbashkëta?

Zgjidhje. Forma eksplicite e barazimit të drejtëzës (l) është $y = kx + 11$, prej ku $n = 11$, kurse barazimi i elipsës në formën kanonike është $\frac{x^2}{\frac{1}{7}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$, prej ku gjejmë $a^2 = \frac{1}{7}$ dhe $b^2 = \frac{1}{9}$. Atëherë,

$$\text{prej kushtit } a^2 k^2 + b^2 < n^2 \text{ kemi } |k| < \frac{8}{3} \sqrt{119} \quad \text{d.m.th.} \quad -\frac{8}{3} \sqrt{119} < k < \frac{8}{3} \sqrt{119} \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Prej pikës $M(-2, 7)$ janë tërhequr tangjentet e elipsës $E: x^2 + 4y^2 = 100$. Si janë barazimet e tyre?

Zgjidhje. Prej një pike që nuk shtrihet në elipsë, mund të tërhiqen dy tangjenta deri te ajo (analogjikisht sikurse te vija rrethore). Barazimi i kërkuar i tangjentës le të jetë $(l): y = kx + n$. Prej barazimit të elipsës $x^2 + 4y^2 = 100$ kemi $a^2 = 100$ dhe $b^2 = 25$. Pika $M \in l$, prandaj $7 = -2k + n$.

$$\text{Me zgjidhjen e sistemit të barazimeve } \begin{cases} -2k + n = 7 \\ 100k^2 + 25 = n^2 \end{cases}, \text{ fitojmë } k_1 = \frac{2}{3}, k_2 = -\frac{3}{8}, n_1 = \frac{25}{3}, n_2 = \frac{25}{4}.$$

Vijon, barazimet e tangjenteve janë: $t_1: 2x - 3y + 25 = 0$ dhe $t_2: 3x + 8y - 50 = 0$ ■

► **Shembulli 5.** Si është barazimi i elipsës E , nëse janë dhënë barazimet e dy tangjenteve të saja:
 $t_1: 3x - 8y - 25 = 0$ dhe $t_2: 4x + 6y - 25 = 0$?

Zgjidhje. Pasi elipsa i prek të dy drejtëzat, me zëvendësimin e $k_1 = \frac{3}{8}$, $n_1 = -\frac{25}{8}$ dhe $k_2 = -\frac{2}{3}$,

$$n_2 = \frac{25}{6} \text{ në barasinë (3), e fitojmë sistemin e barazimeve: } \begin{cases} \frac{9a^2}{64} + b^2 = \frac{625}{64} \\ \frac{4a^2}{9} + b^2 = \frac{625}{36} \end{cases},$$

zgjidhja e të cilit është $a^2 = 25$ dhe $b^2 = \frac{25}{4}$, pra barazimi i elipsës E është: $E: \frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$ ■

DETYRA

1. Caktoji pikëprerjet e elipsës E dhe drejtëzës l , nëse janë :
a) $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ dhe $l: y = 4x$; b) $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ dhe $l: x = 3$; c) $E: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ dhe $l: y = 3$.
2. Cakto pozitën reciproke të drejtëzës l dhe elipsës E , dhe nëse kanë pika të përbashkëta, caktoji nëse janë:
a) $l: 3x + y - 9 = 0$ dhe $E: 27x^2 + 6y^2 = 162$; b) $l: 2x - y + 6 = 0$ dhe $E: 4x^2 + 9y^2 = 324$.
3. Në barazimin e drejtëzës $l: y = -x + n$ caktoji vlerat e parametrin n , ashtu që drejtëza l : a) e prenë elipsën E ; b) e prek elipsën E ; c) nuk ka pika të përbashkëta me elipsën E , nëse elipsa E është $E: 3x^2 + 2y^2 = 60$.
4. Në barazimin e drejtëzës $l: y = -\frac{1}{k}x + \frac{5}{k}$, caktoje k ashtu që drejtëza l është tangjenta e elipsës $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$.
5. Shkruaje barazimin e elipsës, e cila e prek drejtëzën l dhe kalon nëpër pikën M , nëse është:
a) $l: 4x + 15y - 25 = 0$ dhe $M(3, \frac{4}{5})$; b) $l: x + 4y - 8 = 0$ dhe $M(-2, \frac{3}{2})$.
6. Drejtëza $l: x + y - 5 = 0$, e prek elipsën E , fokusët e së cilës janë $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$. Formoje barazimin e elipsës E .
7. Është dhënë barazimi i tangjentës $t: 2x + 3y - 2 = 0$ të elipsës $E: x^2 + 4y^2 = K$. Caktoji gjysmëboshtet dhe koordinatat e pikës prekëse D .
8. Shkruaji barazimet e tangjenteve të tërhequra prej pikës P deri te elipsa E , nëse janë:
a) $P(5, 5)$ dhe $E: x^2 + 9y^2 = 225$; b) $P(-4, 0)$ dhe $E: 3x^2 + 3y^2 = 12$.
9. Formoje barazimin e elipsës, e cila i prek drejtëzat $l_1: x + 4y - 25 = 0$ dhe $l_2: 4x + 9y - 75 = 0$.
10. Caktoje barazimin e tangjentës së elipsës $E: x^2 + 4y^2 = 10$, e cila është paralele me drejtëzën $l: 3x + 2y + 7 = 0$.
11. Caktoje barazimin e tangjentës së elipsës $E: 3x^2 + 4y^2 = 120$, e cila është normale në drejtëzën $l: 2x - y + 7 = 0$.

4.3.6. BARAZIMI I TANGJENTËS DHE NORMALES NË PIKËN E ELIPSËS

Le të jenë dhënë elipsa E me barazimin

$$E: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dhe pika $T(x_1, y_1)$ prej elipsës. Duhet ta caktojmë barazimin e tangjentës t të elipsës në pikën T (fig.1).

Barazimi i drejtëzës t le të jetë dhënë me barazimin në formën eksplicite

$$t: y = kx + n. \quad (1)$$

Koeficientët k dhe n do t'i përcaktojmë prej kushtit drejtëza dhe elipsa të kenë një pikë të përbashkët (prekëse), përkatësisht sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \quad (2)$$

të ketë një zgjidhje të vetme.

Nëse y prej barazimit të parë e zëvendësojmë në të dytin, pas rregullimit e fitojmë barazimin

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

zgjidhjet e së cilës janë

$$x_{1,2} = \frac{-a^2kn \pm ab\sqrt{a^2k^2 + b^2 - n^2}}{a^2k^2 + b^2}, \quad (3)$$

të cilat kur do t'i zëvendësojmë në barazimin $y = kx + n$, fitojmë

$$y_{1,2} = \frac{b^2n \pm abk\sqrt{a^2k^2 + b^2 - n^2}}{a^2k^2 + b^2}. \quad (4)$$

Prej kushtit, drejtëza është tangjentë e elipsës, kemi

$$D = a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0 \quad \text{d.m.th.} \quad a^2k^2 + b^2 = n^2 \quad (5)$$

Prej (3) dhe (4), për shkak të (5), koordinatat e pikës prekëse janë $x_1 = -\frac{ka^2}{n}$, $y_1 = \frac{b^2}{n}$, prej ku

$$k = -\frac{x_1n}{a^2}, \quad n = \frac{b^2}{y_1}, \quad \text{përkatësisht}$$

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \quad n = \frac{b^2}{y_1}. \quad (6)$$

Nëse vlerat e caktuara për k dhe n i zëvendësojmë në (1) fitojmë:

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1}, \quad (7)$$

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2, \quad (8)$$

ose

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1} \quad (9)$$

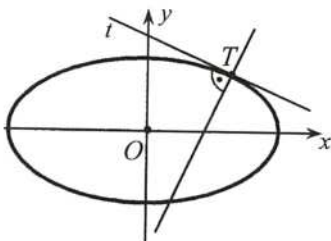


fig.1

Barazimi (7) është barazimi i tangjentës së elipsës në formën *eksplicite*, barazimi (8) është barazimi i tangjentës në *formën e përgjithshme*, kurse (9) është *forma segmentale* e saj.

Normalja e elipsës në pikën $T(x_1, y_1)$ është normale në tangjentën e elipsës në pikën T , pra barazimi i saj është:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \quad (10)$$

➤ **Shembulli 1.** Ta shkruajmë barazimin e tangjentës t në pikën $T(8,3)$ prej elipsës $E: x^2 + 4y^2 = 100$.

Zgjidhje. Prej barazimit të elipsës kemi $a^2 = 100$, $b^2 = 25$, kurse koordinatat e pikës prekëse janë $x_1 = 8, y_1 = 3$. Nëse këto vlera i zëvendësojmë në (6) fitojmë:
 $25 \cdot 8x + 100 \cdot 3y = 100 \cdot 25$, përkatësisht $t: 2x + 3y - 25 = 0$ ■

➤ **Shembulli 2.** T 'i shkruajmë barazimet e tangjentës dhe normales në pikën $T(2, y < 0)$ prej elipsës $(E): 2x^2 + 8y^2 = 16$.

Zgjidhje. Pasi $T \in E \Rightarrow 2 \cdot 2^2 + 8y^2 = 16$, prej ku $y = \pm 1$. Prej kushtit $y < 0$ vijon se pika prekëse është $T(2, -1)$. Atëherë barazimi i tangjentës është: $t: x - 2y - 4 = 0$.

Normalja e elipsës në pikën T e ka barazimin $n: y + 1 = -2(x - 2)$, përkatësisht $2x + y - 3 = 0$. (Si është fituar koeficienti k i normales?) ■

➤ **Shembulli 3.** T 'i shkruajmë barazimet e tangjenteve të elipsës $E: 2x^2 + 3y^2 = 120$, të cilat prej boshteve të koordinatave prejnë segmenta të barabartë.

Zgjidhje. Drejtëza e cila prenë segmente të barabartë në boshtet koordinative e ka barazimin: $\frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1$, përkatësisht $x + y - m = 0$, prej ku fitojmë se koeficienti i drejtimit është $k = -1$, kurse segmenti në boshtin y është $n = m$. Prej barazimit të elipsës fitojmë $a^2 = 60$ dhe $b^2 = 40$. Nëse madhësitë e caktuara i zëvendësojmë në kushtin për prekje të drejtëzës dhe elipsës ($a^2 k^2 + b^2 = n^2$), fitojmë

$$60 \cdot (-1)^2 + 40 = m^2, \quad m = \pm 10.$$

Domethënë kemi dy tangjente të cilat e kënaqin kushtin e detyrës. Barazimet e tyre janë:

$$t_1: x + y - 10 = 0 \quad \text{dhe} \quad t_2: x + y + 10 = 0 \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Të formojmë barazim të tangjenteve në pikëprerjet e drejtëzës $l: x + 2y - 7 = 0$ dhe elipsës $E: x^2 + 4y^2 = 25$.

Zgjidhje. Koordinatat e pikëprerjeve janë zgjidhje të sistemit të barazimeve

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y \\ (7 - 2y)^2 + 4y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 4 \\ y_1 = 2, y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Domethënë, pikëprerjet janë}$$

$M_1(3, 2)$ dhe $M_2(4, \frac{3}{2})$, pra barazimet e tangjenteve janë $t_1: 3x + 8y - 25 = 0$ dhe $t_2: 4x + 6y - 25 = 0$. ■

- Shkruaje barazimin e tangjentës t të elipsës E në pikën e saj prekëse nëse:
a) $E: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$ dhe $T(4,3)$; b) $E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ dhe $T(3, y < 0)$; c) $E: 16x^2 + 25y^2 = 400$ dhe $T(\square 4, y > 0)$
- Formoji barazimet e tangjentës dhe normales në pikën e dhënë të elipsës, nëse është:
a) $E: x^2 + 4y^2 = 20$ dhe $T(4, y < 0)$; b) $E: 4x^2 + 25y^2 = 400$ dhe $T(x < 0, \frac{8}{5})$;
c) $E: 3x^2 + 4y^2 = 28$ dhe $T(2,3)$.
- Në cilën pikë të elipsës $E: 3x^2 + 4y^2 = 12$, kalon normalja nëpër fokusin e elipsës së dhënë?
- Caktoje koeficientin k të drejtëzës $y = kx + 2$, që ajo të jetë normale e elipsës $E: x^2 + 4y^2 = 4$.
- Sa duhet të jetë n për drejtëzën $y = \frac{1}{2}x + n$ që të jetë normale e elipsës $E: 2x^2 + y^2 = 3$?
- Drejtëza $l: 2x - y - 1 = 0$ a është normale e elipsës $E: 3x^2 + 4y^2 = 48$?
- Shkruaje barazimin e elipsës, nëse është dhënë gjysmëboshti i madh $a = 6$ dhe tangjenta $t: x + y - 9 = 0$.
- Shkruaje barazimin e elipsës nëse është dhënë gjysmëboshti i vogël b dhe tangjenta t :
a) $b = 2$, $t: 3x + 10y - 25 = 0$; b) $b = 10$, $t: x + 2y - 25 = 0$.
- Shkruaje barazimin e elipsës, nëse është dhënë gjysmëparametri p dhe tangjenta t :
a) $p = \frac{3}{2}$, $t: x + 4y - 16 = 0$; b) $p = \frac{16}{5}$, $t: 3x + 5y - 25 = 0$.
- Është dhënë barazimi i tangjentës $l: x - 6y + 10 = 0$, që e prenë elipsën $E: x^2 + 4y^2 = 100$. Caktoje pikëprerjen e tangjenteve të tërhequra nëprerjen e drejtëzës l dhe elipsës E .

4.3.7. HIPERBOLA. BARAZIMI I HIPERBOLES

Për ndryshim prej vijës rrethore dhe elipsës, në studimin e gjertanishëm në matematikë hiperbola si lakore prej rendit të dytë është përmendura fare pak. Por, kjo nuk do të thotë se ajo është me rëndësi të vogël praktike. Të mësuarit e hiperbolës është veçanërisht e rëndësishme për astronominë, sistemet radio navigacione, etj. Përkufizimi gjeometrik për hiperbolën është ky.

Përkufizimi. Le të jenë F_1 dhe F_2 dy pika fikse në rrafshin Σ dhe le të jetë $\overline{F_1 F_2} = 2c$. **Hiperbola** është bashkësi e të gjitha pikave $M(x,y)$ në rrafshin Σ ashtu që madhësia absolute e ndryshimit të largësive prej M deri te F_1 dhe F_2 është konstante dhe e barabartë me $2a$ ($a < c$).

Domethënë, hiperbola është bashkësi

$$H = \{M(x, y) \in \Sigma \mid |\overline{MF_1} - \overline{MF_2}| = 2a\}$$

Pikat F_1 dhe F_2 quhen **fokusë të hiperbolës**, kurse lartgësia ndërmjet fokusëve $\overline{F_1F_2}$ quhet **largësia fokale**. Mesi O për segmentin F_1F_2 quhet **qendra e hiperbolës**.

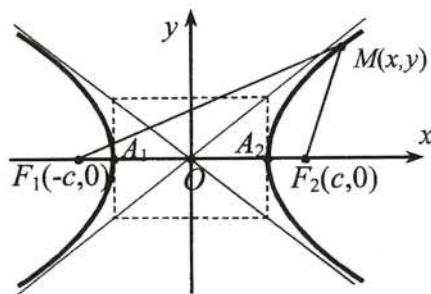


fig.1

Analogjikisht sikurse te elipsa, për ta caktuar barazimin e hiperbolës, sistemin koordinativ xOy e zgjedhim ashtu që fokusët të shtrihen në boshtin x , y është simetralja e largësisë fokale F_1F_2 , kurse fillimi i koordinatave është në qendrën C të hiperbolës (fig. 1). Atëherë fokusët kanë koordinata $F_1(-c, 0)$ dhe $F_2(c, 0)$. Pikat A_1 dhe A_2 në të cilat hiperbola e prenë boshtin x , janë **kulmet** e hiperbolës.

Do të tregojmë se largësia $\overline{A_1A_2} = 2a$. Me të vërtetë, sipas përkufizimit, për pikën M të çfarëdoshme nga njëra degë e hiperbolës, për shembull prej të djathtës, ndryshimi $\overline{MF_1} - \overline{MF_2}$ ka vlerë konstante $2a$. Por, ajo duhet të vlejë edhe kur në vend të M do ta marrim pikën A_2 , kurse atëherë kemi:

$$\overline{A_2F_1} - \overline{A_2F_2} = \overline{A_2F_1} - \overline{A_1F_1} = \overline{A_1A_2} = 2a.$$

Vijon koordinatat e kulmeve janë $A_1(-a, 0)$ dhe $A_2(a, 0)$.

Largësitë $\overline{MF_1} = r_1$ dhe $\overline{MF_2} = r_2$ i quajmë **rreze fokale** për pikën M . Prej përkufizimit të hiperbolës kemi:

$$|\overline{MF_1} - \overline{MF_2}| = 2a \text{ d.m.th. } |r_1 - r_2| = 2a \quad (a > 0) \quad (1)$$

por, për brinjët e trekëndëshit F_1F_2M vlen jobarasia $|r_1 - r_2| < 2c$, pra vijon $2a < 2c$ d.m.th. $a < c$.

Tani, në pajtim me formulën për gjatësi ndërmjet dy pikave, prej relacionit (1) e fitjmë barazimin

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a. \quad (2)$$

Barazimi (2) paraqet barazimin e hiperbolës. Por, forma (2) nuk është e përshtatshme për zbatim praktik, prandaj barazimin (2) do ta transformojmë deri në formë më të thjeshtë.

Së pari, barazimin (2) e shkruajmë në formën:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

përkatesisht

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Pas kuadrimit të dy anëve dhe pas rregullimit fitojmë:

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Përsëri duke kuadruar dhe rregulluar e fitojmë barazimin:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Pasi $c > a$ vijon $c^2 - a^2 > 0$, pra duke vënduar $c^2 - a^2 = b^2$ barazimi i fundit e fiton formën:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (3)$$

ose

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Barazimin (3) përkatësisht (4) e quajmë barazim **kanonik** (qendror) barazimi i hiperbolës.

Pasi në barazimin (3) edhe të dy ndryshoret x dhe y paraqiten vetëm në shkallën çift (katror), vijon se hiperbola H është simetrike në lidhje me boshtet koordinative dhe fillimit të koordinatave. Përkatësisht, nëse $M(x, y) \in H$, vijon se edhe pikat $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$ dhe $M_3(-x, -y)$ gjithashtu i takojnë hiperbolës.

Për shembull, pika $M(3\sqrt{2}, 2)$, shtrihet në hiperbolë $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, pasi $\frac{(3\sqrt{2})^2}{9} - \frac{2^2}{4} = \frac{18}{9} - \frac{4}{4} = 2 - 1 = 1$, por edhe pikat $M_1(-3\sqrt{2}, 2)$, $M_2(3\sqrt{2}, -2)$ dhe $M_3(-3\sqrt{2}, -2)$ gjithashtu shtrihen në hiperbolë (provo).

Nëse barazimin e hiperbolës (3) e zgjidhim sipas y , fitojmë:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (5)$$

Prej këtij barazimi mund të përfundohet se hiperbola është përkufizuar për $x^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq a$, d.m.th. për $x \leq -a$ ose $x \geq a$, që do të thotë se pikat e saja në rrafshin xOy gjenden majtas prej drejtëzës $x = -a$ dhe djathtas prej drejtëzës $x = a$. Domethënë, hiperbola është lakore e rendit të dytë e cila përbëhet prej dy degëve, që nuk ishte rast te vija

rrethore dhe elipsa. Pikëprerjet e hiperbolës me boshtin x janë pikat $A_1(-a, 0)$ dhe $A_2(a, 0)$, **kulmet** e hiperbolës. Gjatësinë $\overline{A_1 A_2} = 2a$ e quajmë **boshti real**, kurse gjatësinë $\overline{B_1 B_2} = 2b$, ku $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ dhe $b^2 = c^2 - a^2$, e quajmë **boshti imagjinar** (pasi ai nuk i përmban pikat e hiperbolës) (fig. 2)

Vërejtje. Herësi prej largësisë fokale $\overline{F_1 F_2} = 2c$ dhe gjatësisë së gjysmëboshtit real quhet ekscentriciteti numerik, d.m.th.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (6)$$

Pasi për hiperbolën kemi $c > a$, vijon $\varepsilon > 1$. Gjithashtu, pasi $c^2 = a^2 + b^2$, d.m.th. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, vlen

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (7)$$

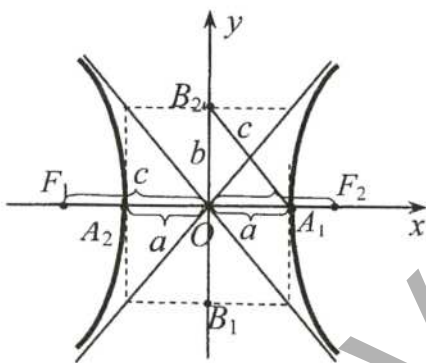


fig.2

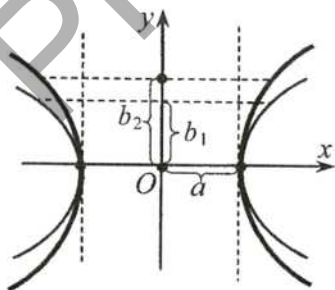


fig.3

Ekscentricitetin numerik ε për hiperbolën e cakton „hapja” e degëve të hiperbolës. Përkatësisht, nëse gjatë gjysmëboshtit të fiksuar a zmadhohet ekscentriciteti, atëherë zmadhohet raporti $\frac{b}{a}$ (përkatësisht b), kurse me të zmadhohet hapja e hiperbolës (fig. 3).

➤ **Shembulli 1.** Është dhënë gjysmëboshti real $a = 4$ dhe gjysmëboshti imagjinar $b = 3$. Ta caktojmë barazimin e hiperbolës, koordinatat e fokusëve dhe ekscentricitetin numerik.

Zgjidhje. Barazimi i hiperbolës do të jetë $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ose $9x^2 - 16y^2 = 144$,
 $c = \pm\sqrt{16+9} = \pm 5$, pra fokusët janë $F_1(-5,0)$ dhe $F_2(5,0)$, kurse ekscentriciteti numerik $\varepsilon = \frac{5}{4}$ ■

Hiperbola ka edhe një veti, e cila deri më tani lakoret e mësuara të rendit të dytë nuk e kanë. Përkatësisht, kur abshisat e pikave të hiperbolës pakufi rriten sipas vlerës absolute ordinarat përkatëse afrohen deri te drejtëzat $y = \frac{b}{a}x$ dhe $y = -\frac{b}{a}x$, kurse ato janë drejtëzat që i përmbajnë diagonalet e paralelogramit $PQRS$ me brinjë $2a$ dhe $2b$ (fig. 4). Domethënë, nëse pika $M(x,y)$ lëviz nëpër hiperbolë duke tentuar në pakufi, atëherë ajo afrohet nga njëra prej drejtëzave $y = -\frac{b}{a}x$ ose $y = \frac{b}{a}x$. Drejtëzat të cilat e kanë këtë veti i quajmë **asimptota** të hiperbolës. Vijnë, drejtëzat $y = -\frac{b}{a}x$ dhe $y = \frac{b}{a}x$ janë asimptota për hiperbolën të dhënë me barazimin

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

➤ **Shembulli 2.** Është dhënë hiperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$. T'i caktojmë gjysmëboshtet, koordinatat e fokusëve dhe barazimet e asimptotave, kurse pastaj ta vizatojmë hiperbolën.

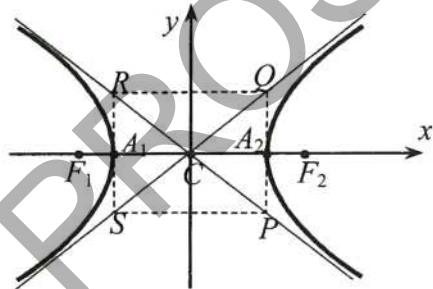


fig.4

Zgjidhje. E shkruajmë hiperbolën në formën kanonike $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, prej ku i përcaktojmë gjysmëboshtet $a = 3$, $b = 2$, dhe $c = \pm\sqrt{9+4} = \pm\sqrt{13}$, pra fokusët janë $F_1(-\sqrt{13},0)$ dhe $F_2(\sqrt{13},0)$. Barazimet e asimptotave janë $y = \frac{2}{3}x$ dhe $y = -\frac{2}{3}x$ (fig. 4) ■

➤ **Shembulli 3.** Është dhënë hiperbola me barazimin $H: x^2 - 4y^2 = 12$. Ta caktojmë gjatësinë e kordës që kalon nëpër njëra prej fokusëve të hiperbolës dhe është paralele me boshtin y.

Zgjidhje. Analogjikisht sikurse te elipsa edhe këtu gjatësia e kordës së kërkuar quhet **parametri** i hiperbolës H , e cila shënohet me $2p$ dhe për atë vlen $2p = \frac{2b^2}{a}$, ndërsa $p = \frac{b^2}{a}$ quhet **gjysmëparametri** i hiperbolës H (bëje vizatimin dhe vërteto se $p = \frac{b^2}{a}$). Prej barazimit të hiperbolës $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ kemi $a^2 = 12$, $b^2 = 3$, pra fitojmë $p = \frac{3}{2\sqrt{3}}$, ose $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ■

➤ **Shembulli 4.** Ta shkruajmë barazimin e hiperbolës H , nëse janë dhënë barazimet e asimptotave të saja $y = \pm \frac{4}{3}x$ dhe largësia fokale $2c = 20$.

Zgjidhje. Pasi $2c = 20 \Rightarrow c = 10$, kurse $a^2 + b^2 = 100$. Pastaj prej barazimeve të asimptotave $y = \pm \frac{4}{3}x$ kemi $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Prej sistemit të barazimeve $\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ 3b = 4a \end{cases}$ fitojmë $a^2 = 36$, $b^2 = 64$. Vijon, barazimi i hiperbolës është $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ■

➤ **Shembulli 5.** Ta shkruajmë barazimin e hiperbolës që kalon nëpër pikat $M_1(2,1)$ dhe $M_2(10,7)$.

Zgjidhje. Prej kushtit të pikave M_1 dhe M_2 i takojnë hiperbolës vijon se koordinatat e tyre e kënaqin barazimin e hiperbolës $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, d.m.th. e fitojmë sistemin e barazimeve:

$$\begin{cases} 4b^2 - a^2 = a^2b^2 \\ 100b^2 - 49a^2 = a^2b^2 \end{cases}, \text{ zgjidhja e të cilit është } a^2 = 2, b^2 = 1, \text{ pra barazimi i hiperbolës është } x^2 - 2y^2 = 2 \text{ ■}$$

➤ **Shembulli 6.** Ta caktojmë barazimin e hiperbolës barabrinjëse që kalon nëpër pikën $M(3,-1)$.

Zgjidhje. Hiperbola barabrinjëse është ajo hiperbolë për të cilën boshti real dhe imagjinar janë të barabartë ndërmjet veti, d.m.th. $2a = 2b$. Domethënë barazimi i saj është $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Pasi $M \in H \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 8$, pra barazimi i hiperbolës H do të jetë: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ ose $x^2 - y^2 = 8$ ■

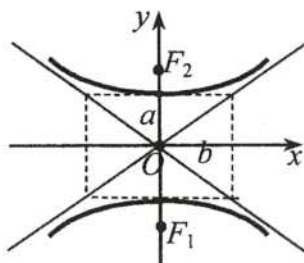


fig.5

Vërejtje. Nëse fokusët e hiperbolës janë në boshtin y , d.m.th. në pikat $F_1(0, -c), F_2(0, c)$, gjysmëboshti real është a , kurse gjysmëboshti imagjinar është b , atëherë barazimi i hiperbolës është

$$a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2 \text{ ose } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1.$$

Në këtë rast asimptota janë drejtëzat: $y = \pm \frac{a}{b}x$, kurse ekscentriciteti përsëri është $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Grafiku është sikurse në fig.5.

DETYRA

- Shkruaje barazimin e hiperbolës H nëse është dhënë:
 - Gjysmëboshti real $a = 6$ dhe gjysmëboshti imagjinar $b = 4$;
 - Largësia fokale është 10, kurse gjysmëboshti imagjinar $b = 3$;
 - Gjysmëboshti real është 8, kurse ekscentriciteti numerik $\varepsilon = \frac{5}{4}$.
- Cakto gjatësitë e gjysmëboshteve, koordinatat e fokusëve dhe barazimet e asimptotave të hiperbolës H , nëse është: a) $H: 16x^2 - 9y^2 = 144$; b) $H: x^2 - 16y^2 = 16$.
- Shkruaje barazimin e hiperbolës H , e cila kalon nëpër pikat $M_1(6, -1)$ dhe $M_2(-3, 2\sqrt{2})$.
- Çfarë shenje ka trinci $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ për bashkësinë e pikave:
 - ndërmjet dy degëve të hiperbolës;
 - në brendësinë e njërës degë të hiperbolës?
- Si është barazimi i hiperbolës H , nëse fokusët e saj janë në boshtin y , kurse largësia fokale është 100, ndërsa boshti real i hiperbolës është 64?
- Formo barazimin e hiperbolës barabrinjëse, nëse largësia fokale është 32.
- Shqyrto pozitën e pikës M në lidhje me hiperbolën H , nëse është dhënë:
 - $M(-3, 0)$ dhe $H: 7x^2 - 9y^2 = 63$;
 - $M(6, -2)$ dhe $H: 11x^2 - 25y^2 = 275$;
 - $M(2, 4)$ dhe $H: 16x^2 - 5y^2 = 19$.
- Shkruaje barazimin qëndror të hiperbolës, nëse:
 - $c = 2\sqrt{3}$ dhe këndi ndërmjet asimptotave $\varphi = 60^\circ$;
 - $c = 4\sqrt{3}$ dhe $\varphi = 120^\circ$.
- Shkruaje barazimin e hiperbolës H , nëse $c = 2$, kurse fokusët e saj puthiten me fokusët e elipsës $E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ato janë konfokale).
- Formo barazimin e hiperbolës H , nëse janë dhënë asimptotat dhe fokusi $F_2(c, 0)$:
 - $y = \pm \frac{3}{4}x$, $c = 5$;
 - $y = \pm \frac{5}{12}x$, $c = 13$.
- Caktoji pikëprerjet e drejtëzës l dhe hiperbolës H , nëse është:
 - $l: 4x - 3y + 36 = 0$ dhe $H: 36x^2 - 81y^2 = 2916$;
 - $l: 2x - y - 10 = 0$ dhe $H: x^2 - 4y^2 = 20$.

4.3.8. POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE HIPERBOLËS

Në mënyrë analoge sikurse te elipsa, pozitën reciproke të drejtëzës $l: y = kx + n$ dhe hiperbolës $H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ do ta caktojmë me diskutimin e zgjidhjeve të sistemit të barazimeve

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \quad (1)$$

Pas zëvendësimit të y prej barazimit të parë të hiperbolës dhe pas rregullimit, fitohet barazimi katror

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2knx - a^2(b^2 + n^2) = 0 \quad (2)$$

Diskriminanta e së cilës është $D = 4a^2b^2(b^2 + n^2 - a^2k^2)$.

I. Le të jetë $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Zgjidhja e barazimit katror, por në pajtim me atë dhe zgjidhjet e sistemit (1) varen prej asaj si është vlera e diskriminantës përkatëse, d.m.th. a është $D > 0, D = 0$ ose $D < 0$.

Pasi $4a^2b^2 > 0$, shenja D , kurse me të zgjidhjet e sistemit (1) dhe pozita reciproke e drejtëzës dhe hiperbolës varen prej shenjës së shprehjes

$$b^2 + n^2 - a^2k^2 \quad (3)$$

dhe megjithatë kemi:

1° nëse $D > 0$, d.m.th. $a^2k^2 - b^2 < n^2$, drejtëza l e prenë hiperbolën në dy pika, d.m.th. $l \cap H = \{M_1, M_2\}$ (fig.1);

2° nëse $D = 0$ d.m.th. $a^2k^2 - b^2 = n^2$, drejtëza l dhe hiperbola kanë një pikë të përbashkët, d.m.th. $l \cap H = \{T\}$ (fig.2), pra relacioni

$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \quad (4)$$

është edhe kusht për prekje të drejtëzës $l: y = kx + n$ dhe hiperbolës $H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$;

3° nëse $D < 0$, d.m.th. $a^2k^2 - b^2 > n^2$, drejtëza l dhe hiperbola H nuk kanë pika të përbashkëta, d.m.th. $l \cap H = \emptyset$ (fig.3).

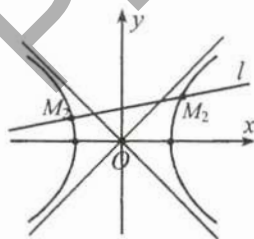


fig.1

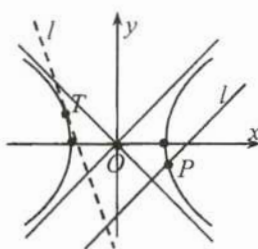
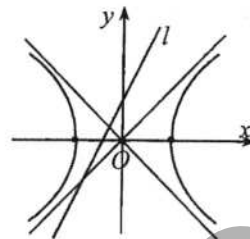


fig.2

II. Nëse $b^2 - a^2 k^2 = 0$, barazimi (2) është linear dhe ka zgjidhje të vetme, pra drejtëza dhe hiperbola kanë një pikë të përbashkët, kurse ai është rasti kur $k = \pm \frac{b}{a}$, d.m.th. kur drejtëza l është paralele me njërin prej asimptotave (fig.2)



fig

.3

➤ **Shembulli 1.** Ta caktojmë pozitën reciproke të drejtëzës $l: 2x + y - 1 = 0$ dhe hiperbolës $H: 3x^2 - y^2 = 3$. ■

Zgjidhje. Prej barazimit të drejtëzës l kemi $k = -2$ dhe $n = 1$, kurse prej barazimit të hiperbolës H është $a^2 = 1$ dhe $b^2 = 3$. Nëse këto vlera i zëvendësojmë te shprehja (3), fitojmë: $3 + 1 - 1 \cdot (-2)^2 = 0$, prej ku vijon $D = 0$, që do të thotë se drejtëza l e prek hiperbolën H . Pikën prekëse e gjejmë duke e zgjidhur sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}, \text{zgjidhja e së cilës është } x_1 = x_2 = 2 \text{ dhe } y_1 = y_2 = -3.$$

Vijon, pika prekëse është $T(2, -3)$, kurse drejtëza e dhënë l është tangjenta e hiperbolës H . ■

➤ **Shembulli 2.** Ta caktojmë pozitën reciproke të drejtëzës $l: 2x - y - 10 = 0$ dhe hiperbolës $H: x^2 - 4y^2 = 20$.

Zgjidhje. Këtu $k = 2$, $n = -10$ dhe $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Nëse këto vlera i zëvendësojmë në barasinë (3) fitojmë $5 + 100 - 20 \cdot 4 = 25 > 0$ d.m.th. $D > 0$, që do të thotë se drejtëza dhe hiperbola priten. Duke e zgjidhur sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} 2x - y - 10 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 10 \\ 3x^2 - 32x + 84 = 0 \end{cases}$$

fitojmë $M_1(6, 2)$, $M_2(3, -\frac{2}{3})$. ■

➤ **Shembulli 3.** Për cilën vlerë të koeficientit k drejtëza $l: y = kx - \frac{9}{2}$ e prek hiperbolën $H: 4x^2 - y^2 = 36$?

Zgjidhje. Prej kushtit për prekje të drejtëzës dhe hiperbolës: $a^2 k^2 - b^2 = n^2$, fitojmë $9k^2 - 36 = \frac{81}{4}$, prej ku $k = \pm \frac{5}{2}$. Domethënë, gjatë kushtit të dhënë ekzistojnë dy drejtëza: $y = \pm \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}$, të cilat janë tangjente të hiperbolës së dhënë. ■

➤ **Shembulli 4.** Në hiperbolën $H: x^2 - 6y^2 = 6$, të tërhiqet tangjentë e cila me kahen pozitive të boshtit x formon kënd prej 150° .

Zgjidhje. Prej kushtit të detyrës vijon se tangjenta e $y = x \cdot \operatorname{tg} 150^\circ + n$, d.m.th. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n$. Domethënë, duhet ta përcaktojmë n . Prej barazimit të hiperbolës kemi $a^2 = 6$, $b^2 = 1$, pra prej kushtit për prekje $a^2 k^2 - b^2 = n^2$ fitojmë $n = \pm 1$. Vijon, barazimet e tangjenteve janë $y = -x \frac{\sqrt{3}}{3} \pm 1$. ■

➤ **Shembulli 5.** Prej pikës $P(5,9)$ janë konstruktuar tangjentet e hiperbolës $H : 3x^2 - y^2 = 3$. T'i caktojmë barazimet e tyre.

Zgjidhje. Në mënyrë analoge sikurse te vija rrethore dhe elipsa edhe këtu prej një pike që nuk shtrihet në lakore, mund të tërhiqen dy tangjente. Lehtë provohet se $P \notin H$ (provo). Barazimi i tangjentës le të jetë $t : y = kx + n$. Prej kushtit për prekje të drejtëzës dhe hiperbolës dhe kushtit $P \in t$, e fitojmë sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} 5k + n = 9 \\ k^2 - n^2 = 3 \end{cases}, \text{ prej ku i caktojmë parametrat } k \text{ dhe } n: k_1 = 2, k_2 = \frac{7}{4}, n_1 = -1 \text{ dhe } n_2 = \frac{1}{4}.$$

Vijon, barazimet e tangjentëve janë $t_1 : 2x - y - 1 = 0$ dhe $t_2 : 7x - 4y + 1 = 0$. ■

➤ **Shembulli 6.** Të formojmë barazim të hiperbolës që i prek drejtëzat $l_1 : 2x - y - 1 = 0$ dhe $l_2 : 7x - 4y - 1 = 0$.

Zgjidhje. Duke e shfrytëzuar kushtin për prekje të hiperbolës me drejtëzë l_1 dhe l_2 e fitojmë sistemin e barazimeve : $\begin{cases} 4a^2 - b^2 = 1 \\ \frac{49}{16}a^2 - b^2 = \frac{1}{16} \end{cases}$, prej ku fitojmë $a^2 = 1$ dhe $b^2 = 3$, pra atëherë barazimi i hiperbolës është $H : 3x^2 - y^2 = 3$ ■

DETYRA

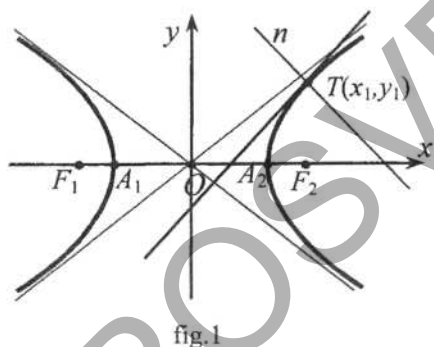
- Caktoje pozitën reciproke të drejtëzës l dhe hiperbolës H :
 - $l : 2x - y + 3 = 0$ dhe $H : x^2 - 4y^2 = 4$; b) $l : 4x - y + 1 = 0$ dhe $H : 16x^2 - 5y^2 = 80$;
 - $l : 4x - 3y + 36 = 0$ dhe $H : 36x^2 - 81y^2 = 2916$; c) $l : 5x - 3y + 32 = 0$ dhe $H : x^2 - y^2 = 64$.
- Caktoji pika prekëse të drejtëzës l dhe hiperbolës H :
 - $l : 5x - 6y - 9 = 0$ dhe $H : 4x^2 - 9y^2 = 36$; b) $l : 8x - 3y = 7$ dhe $H : 4x^2 - y^2 = 7$;
 - $l : 4x^2 - 3y^2 - 7 = 0$ dhe $H : x^2 - y^2 = 7$; c) $l : 5x - 6y - 32 = 0$ dhe $H : x^2 - 4y^2 = 63$.
- Caktoji pikëprerjet e drejtëzës (l) dhe hiperbolës H :
 - $l : 2x - y + 4 = 0$ dhe $H : x^2 - y^2 = 4$; b) $l : 24x + 35y + 60 = 0$ dhe $H : 9x^2 - 25y^2 = 225$.
- Cakto për cilën vlerë të parametrin m drejtëza $l : y = \frac{5}{2}x + m$:
 - e prenë; b) e prek; c) nuk ka pika të përbashkëta me hiperbolën $H : 4x^2 - y^2 = 36$.
- Prej pikës $P(2,1)$ janë tërhequr tangjentet e hiperbolës $H : 8x^2 - 9y^2 = 72$. Formoji barazimet e tyre.
- Është dhënë hiperbola $H : 5x^2 - 4y^2 = 20$. Formoje barazimin e tangjentës e cila është paralele me drejtëzën $l : 3x - 2y = 0$.
- Formo barazimin e tangjentës së hiperbolës $H : 7x^2 - 2y^2 = 14$, e cila është normale në drejtëzën $l : x + 2y - 3 = 0$.

8. Formoje barazimin e hiperbolës H , e cila e prek drejtëzën $l: x - y + 1 = 0$ dhe kalon nëpër pikën $M(3,0)$ ($M \in H$).
9. Në barazimin e drejtëzës $l: (m+1)x - 6y - 4m = 0$, caktoje parametrin m ashtu që drejtëza l është tangjentë e hiperbolës $H: x^2 - 4y^2 = 16$.
10. Në barazimin e hiperbolës $H: x^2 - my^2 = 2m$, caktoje parametrin m ashtu që drejtëza $l: 3x - 4y + 2 = 0$ është tangjentë e hiperbolës.

4.3.9. BARAZIMI I TANGJENTËS DHE NORMALES NË PIKËN E HIPERBOLES

Në pikën paraprake e fituam kushtin për prekje të drejtëzës dhe hiperbolës. Tani duam ta shkruajmë barazimin e tangjentës së hiperbolës të tërhequr në pikën prekëse. Domethënë, nëse supozojmë se tangjenta e ka barazimin $(t): y = kx + n$, duhet t'i caktojmë k dhe n prej kushtit të drejtëzës (t) ta prek hiperbolën. Megjithatë, është e qartë se për hiperbolën me barazimin $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, koeficienti i tangjentës $k \neq \pm \frac{b}{a}$ (pse?).

Pika prekëse e drejtëzës dhe hiperbolës le të jetë $T(x_1, y_1)$. Me mënyrën analoge me atë që e bëm për elipsën, fitojmë:



$$k = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad n = -\frac{b^2}{y_1} \quad (1)$$

pra barazimi i tangjentës i shkruar në formën eksplicite është

$$t: y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1} \quad (2)$$

Prej ku, forma e përgjithshme e barazimit është

$$\boxed{b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2} \quad (3)$$

kurse forma segmentale është

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1} \quad (4)$$

Duke e zbatuar formën eksplicite (2) të barazimit të tangjentës, menjëherë mund ta shkruajmë edhe **barazimin e normales së hiperbolës** në pikën $T(x_1, y_1) \in H$. Ai është

$$(n): y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \quad (5)$$

➤ **Shembulli 1.** Ta shkruajmë barazimin e tangjentës t e cila e prek hiperbolën $H: 4x^2 - 5y^2 = 20$ në pikën $T(5, -4)$.

Zgjidhje. Prej barazimit të hiperbolës kemi $a^2 = 5$, $b^2 = 4$, por janë dhënë edhe koordinatat e pikës prekëse $x_1 = 5$ dhe $y_1 = -4$. Duke zëvendësuar te barasia (3), e fitojmë barazimin e tangjentës: $20x + 20y = 20$ ose $x + y - 1 = 0$ ■

➤ **Shembulli 2.** Ta shkruajmë barazimin e tangjentës t dhe normales n të hiperbolës $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$ në pikën $T(4, y < 0)$ prej hiperbolës.

Zgjidhje. Prej kushtit $T \in H$ vijon se koordinatat e T e kënaqin barazimin e hiperbolës, d.m.th. $3 \cdot 4^2 - 4y^2 = 12 \Leftrightarrow 4y^2 = 36 \Leftrightarrow y_{1,2} = \pm 3$. Domethënë pika prekëse është $T(4, -3)$, pra me zëvendësimin e drejtpërdrejt në (3) e gjejmë barazimin e tangjentës $t: 3 \cdot 4x + 4 \cdot 3y = 12$ ose $x + y - 1 = 0$, kurse në (5) barazimi i normales është: $n: y + 3 = 1(x - 4)$ ose $n: x - y - 7 = 0$ ■

➤ **Shembulli 3.** Në pikëprerjet e drejtëzës $l: x + 2y - 10 = 0$ dhe hiperbolës $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$, janë tërhequr tangjentet e hiperbolës. Ta caktojmë këndin që e formojnë tangjentat.

Zgjidhje. Duke e zgjidhur sistemin e barazimeve $\begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 = 12 \end{cases}$, i fitojmë pikëprerjet

$T_1(-14, 12)$ dhe $T_2(4, 3)$. Në pajtim me (3) barazimet e të dy tangjenteve janë:

$$t_1: 3 \cdot (-14)x - 4 \cdot 12y = 12 \quad \text{ose} \quad t_1: 7x + 8y + 2 = 0$$

$$t_2: 3 \cdot 4x - 4 \cdot 3y = 12 \quad \text{ose} \quad t_2: x - y - 1 = 0.$$

Koeficientët e drejtimit për tangjentet janë $k_1 = -\frac{7}{8}$, $k_2 = 1$, dhe prej formulës për kënd ndërmjet dy

$$\text{drejtëzave fitojmë: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + \frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} = 15 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 15. \blacksquare$$

➤ **Shembulli 4.** Në pikën P të hiperbolës $H: 9x^2 - 16y^2 = 144$ në kuadrantin e parë, ordinata e së cilës është e barabartë me gjysmëparametrin p të hiperbolës, është tërhequr tangjenta e hiperbolës. Ta caktojmë barazimin e tangjentës.

Zgjidhje. Sipas kushtit të detyrës, pika prekëse është $P(c, p)$, abshisa e së cilës puthitet me fokusin e degës së djathtë të hiperbolës dhe e caktojmë prej kushtit: $c^2 = a^2 + b^2$. Prej barazimit të hiperbolës kemi $a^2 = 16$, $a = 4$ dhe $b^2 = 9$, pra $c = \sqrt{16 + 9} = 5$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$. Domethënë, pika prekëse është $P(5, \frac{9}{4})$, dhe barazimi i tangjentës është $t: 5x - 4y - 16 = 0$ ■

- Shkruaje barazimin e tangjentës në pikën T prej hiperbolës H , nëse është:
 - $H : 4x^2 - 5y^2 = 20$ dhe $T(5, -4)$; b) $H : 3x^2 - y^2 = 3$ dhe $T(7, -12)$; c) $H : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ dhe $T(-4, 3)$.
- Caktoji barazimet e tangjentave të hiperbolës $H : 6x^2 - 10y^2 = 60$ në pikëprerjet me drejtëzën $l : 3x - 5y = 0$.
- Në pikën $T(-10, y > 0)$ e hiperbolës $H : \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ është tërhequr tangjenta. Formoje barazimin e tangjentës.
- Drejtëza $l : 5x - 4y - 16 = 0$ e prek hiperbolën në pikën $T(5, y)$. Caktoje barazimin e hiperbolës.
- Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales në pikën $T(10, 3)$ të hiperbolës $H : x^2 - 4y^2 = 64$.
- Nëse drejtëza $t : 9x - 4y - 11 = 0$ është tangjentë e hiperbolës $H : 3x^2 - y^2 = 11$, caktoje barazimin e normales në pikën prekëse.
- Në pikëprerjet e drejtëzës $l : x + y - 5 = 0$ dhe hiperbolës $H : 25x^2 - 40y^2 = 1000$, janë tërhequr tangjente. Caktoji koordinatat e pikëprerjeve të tangjenteve.
- Cakto barazimin e hiperbolës, nëse dihen asimptotat e saja $y = \pm \frac{1}{2}x$ dhe barazimi i njërës prej tangjentave të saja $t : 5x - 6y - 8 = 0$.
- Te hiperbola $H : 9x^2 - 8y^2 = 72$, caktoje pikë në të cilën tangjenta me kahun pozitive të boshtit x formon kënd prej 60° .

4.3.10. PARABOLA. BARAZIMI I PARABOLËS

Lakoren parabolë mirë e ke të njohur prej vitit të dytë. Sikurse e dinë, ajo është grafiku i funksionit katror. Këtu, në gjeometrin analitike, do të japim përkufizimin gjeometrik të parabolës dhe në bazë të atij përkufizimi, do ta nxjerrim barazimin e saj.

Përkufizimi. Parabola është bashkësi e të gjitha pikave $M(x, y)$ në rrafsh të cilat janë në largësi të barabartë prej drejtëzës së dhënë d dhe prej pikës së dhënë F , ashtu që $F \notin d$.

Domethënë, parabola është bashkësisë $P = \{M(x, y) \mid \overline{MF} = \overline{MP}\}$.

Drejtëza d quhet **direktrisa** e parabolës, kurse pika F quhet **fokusi** i parabolës.

Largësia p prej fokusit F deri te direktrisa d quhet **parametri** i parabolës (fig.1). Le të jetë D pikëprerja e normales e tërhequr prej pikës F deri te drejtza d . Atëherë, në pajtim me përkufizimin e sipërm, për pikën e mesme A të segmentit DF vlen: $\overline{AD} = \overline{AF}$, pra vijon se A është pikë prej parabolës. Këtë pikë e quajmë **kulmi** i parabolës (fig.1).

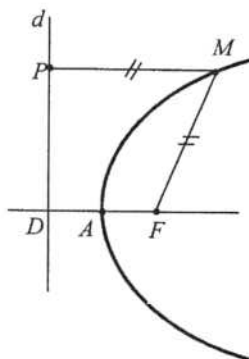


fig.1

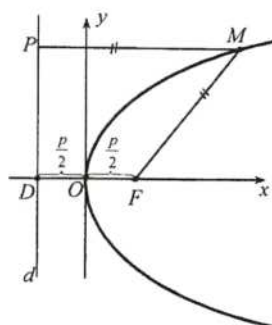


fig.2

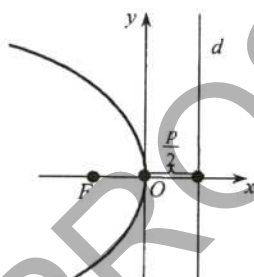


fig.3

Për ta caktuar barazimin e parabolës me parametrin p në formën e mundshme sa më të thjeshtë, sistemin koordinativ e zgjedhim ashtu që boshti x të kalon nëpër fokusin F dhe është normale në direktrisë d , kurse fillimi i koordinatave O është në mesin A ndërmjet fokusit dhe direktrisë (fig.2).

Atëherë, prej përkufizimit të parabolës kemi $\overline{OF} = \overline{OD} = \frac{p}{2}$, pra vijon se fokusi është në pikën $F(\frac{p}{2}, 0)$, kurse barazimi i direktrisë është $x = -\frac{p}{2}$.

Nëse $M(x, y)$ është çfarëdo pikë prej parabolës, projekcioni ortogonal i M mbi direktrisë është pika $P(-\frac{p}{2}, y)$, pra prej përkufizimit të parabolës kemi

$$\overline{MP} = \overline{MF}. \quad (1)$$

Duke e shfrytëzuar përkufizimin për largësinë ndërmjet dy pikave fitojmë

$$\overline{MF} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \text{ dhe } \overline{MP} = x + \frac{p}{2},$$

pra barazimi (1) në formën koordinative është :

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (2)$$

Prej këtij duke kuadruar dhe rregulluar e fitojmë barazimin

$$y^2 = 2px \quad (3)$$

Barazimin (3) e quajmë barazim **kanonik** ose **kulmor** i parabolës, për të cilën fokusi është në pjesën pozitive të boshtit x .

Nëse tani fokusi i parabolës është në pjesën negative të boshtit x (fig.3), atëherë barazimi kanonik i parabolës do të jetë

$$y^2 = -2px. \quad (4)$$

Parabolat $P: y^2 = \pm 2px$ janë simetrike në lidhje me boshtin x pasi nëse është $M_1(x, y) \in P$ atëherë edhe $M_2(x, -y) \in P$, kurse pikat M_1 dhe M_2 janë simetrike në lidhje me boshtin x . Vijon boshti x është

boshti i simetrisë për parabolat $y^2 = \pm 2px$.

Nëse e zgjedhim sistemin koordinativ ashtu që fokusi F i parabolës të shtrihet në boshtin y , atëherë barazimi kanonik i parabolës është:

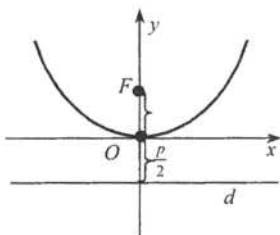


fig.4

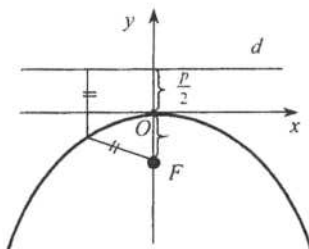


fig.5

$$x^2 = 2py \text{ ose } y = \frac{x^2}{2p}$$

nëse F shtrihet në pjesën pozitive të boshtit y (fig.4), dhe

$$x^2 = -2py \text{ ose } y = -\frac{x^2}{2p}$$

nëse F shtrihet në pjesën negative të boshtit y (fig.5).

Këtë parabolë tani më e ke të njohur prej vitit të dytë.

➤ **Shembulli 1.** T'i caktojmë koordinatat e fokusit, parametrin dhe barazimin e drektorisë së parabolës $P: y^2 = \frac{1}{2}x$.

Zgjidhje. Prej barazimit të parabolës $P: y^2 = 2px$, vijon $2p = \frac{1}{2}$, d.m.th. $p = \frac{1}{4}$, pra fokusi është $F(\frac{1}{8}, 0)$. Direktisa është drejtëz paralele me boshtin y , e cila kalon nëpër pikën $D(-\frac{1}{8}, 0)$, pra e ka barazimin $x = -\frac{1}{8}$. ■

➤ **Shembulli 2.** Ta formojmë barazimin e parabolës, nëse dihet parametri i saj $p = 8$.

Zgjidhje. Me zëvendësimin e drejtpërdrejt në barazimin (2) fitojmë se $y^2 = 16x$. ■

➤ **Shembulli 3.** Ta shkruajmë barazimin e parabolës, nëse dihet fokusi i saj $F(9, 0)$.

Zgjidhje. Fokusi i parabolës $y^2 = 2px$ i ka koordinatat $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$, kurse në rastin tonë $\frac{p}{2} = 9$ ose $p = 18$, pra barazimi i parabolës është $y^2 = 36x$. ■

➤ **Shembulli 4.** Ta formojmë barazimin e parabolës P që kalon nëpër pikën $M(3, 2)$ fokusi i së cilës është në boshtin x .

Zgjidhje. Barazimi kanonik i parabolës është $y^2 = 2px$. Prej kushtit se pika M shtrihet në parabolën P , kemi: $2^2 = 2p \cdot 3$, $6p = 4$, d.m.th. $p = \frac{2}{3}$, pra barazimi i parabolës do të jetë $y^2 = \frac{4}{3}x$. ■

► **Shembulli 5.** Ta shkruajmë barazimin e parabolës e cila kalon nëpër pikën $M(-2,-3)$ fokusi i së cilës është në boshtin x .

Zgjidhje. Barazimi i parabolës është $y^2 = -2px$ (pse?). Me zëvendësimin e koordinatave të M në këtë barazim fitojmë $9 = -2p(-2)$ d.m.th. $p = \frac{9}{4}$, pra barazimi i parabolës do të jetë $y^2 = -\frac{9}{2}x$ ■

► **Shembulli 6.** Të formojmë barazimin e parabolës, direktrisa e së cilës është drejtëza $2x + 5 = 0$.

Zgjidhje. Barazimi i parabolës është $y^2 = 2px$. Prej barazimit të direktrisës $2x + 5 = 0$ d.m.th. $x = -\frac{5}{2}$ vijon $p = 5$, pra parabola do ta ketë barazimin $y^2 = 10x$ ■

DETYRA

- Formo barazimin e parabolës nëse dihet se: a) koordinatat e fokusit janë $\frac{3}{2}$ dhe 0 ;
b) parabola kalon nëpër pikën $M(-1,4)$ kurse fokusi është në boshtin x .
- Te parabola $y^2 = 8x$, gjej pikë M për të cilën $\overline{MF} = 10$.
- Caktoje parametrin dhe fokusin e parabolës:
a) $P: y^2 = \frac{2}{3}x$; b) $P: y^2 = 4x$; c) $P: y^2 = 0,5x$; ç) $P: y^2 = 9x$.
- Shkruaje barazimin e parabolës P , nëse dihet fokusi:
a) $F(4,0)$; b) $F(-5,0)$; c) $F(\frac{3}{4}, 0)$.
- Shkruaje barazimin e parabolës P , nëse dihet barazimi i direktrisës së saj:
a) $x + 5 = 0$; b) $3x + 7 = 0$; c) $2x - 5 = 0$; ç) $4x - 7 = 0$.
- Shkruaje barazimin e parabolës fokusi i së cilës është në boshtin x dhe kalon nëpër pikën:
a) $M(3,-5)$; b) $M(-3,-4)$; c) $M(\frac{7}{2}, -3)$.
- Provo cilat prej pikave $M_1(4,6)$, $M_2(4,5)$ dhe $M_3(2,7)$ shtrihen në parabolë $y^2 = 9x$.
- Cila pikë e parabolës $y^2 = \frac{5}{2}x$ ka koordinata të barabarta?
- Formo barazimin e parabolës, e cila është konfokale me elipsën $9x^2 + 25y^2 = 225$ (fokusi i elipsës është edhe fokusi i parabolës).
- Formo barazimin e parabolës, e cila është konfokale me hiperbolën $x^2 - 8y^2 = 8$.
- Caktoji pikëprerjet e drejtëzës $l: 6x - y - 12 = 0$ dhe parabolës $y^2 = 6x$.

4.3.11. POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE PARABOLËS

Sikurse edhe te lakoret tjera prej rendit të dytë (vija rrethore, elipsa dhe hiperbola), pozita reciproke e drejtëzës $l: y = kx + n$ dhe parabolës $P: y^2 = 2px$ e përcaktojmë duke i shqyrtuar zgjidhjet e sistemit të barazimeve

$$\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 = 2px \end{cases} \quad (1)$$

Duke e zëvendësuar të panjohurën y prej barazimit të parë të sistemit në barazimin e dytë, e fitojmë barazimin katror

$$k^2 x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0 \quad (2)$$

diskriminanta e së cilës është

$$D = 4(kn - p)^2 - 4k^2 n^2 = 4(p^2 - 2knp). \quad (3)$$

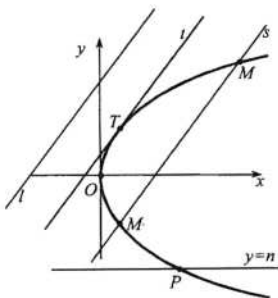


fig.1

I. Le të jetë $k \neq 0$. Varësisht prej asaj se a është $D > 0$, $D = 0$ ose $D < 0$, barazimi katror (2), kurse me të edhe sistemi i barazimeve (1), ka dy zgjidhje të ndryshme, ka një zgjidhje reale ose nuk ka zgjidhje reale. Përkatësisht me të drejtëza l dhe parabola P i kanë këto pozita reciproke (fig. 1):

1° Nëse $D > 0$ d.m.th. $p^2 - 2knp > 0$, drejtëza l e prenë parabolën në dy pika, d.m.th. $l \cap P = \{M_1, M_2\}$;

2° nëse $D = 0$, d.m.th. $p^2 - 2knp = 0$, drejtëza l dhe parabola P kanë pikë të përbashkët (prekëse) d.m.th. $l \cap P = \{T\}$, kurse relacioni $p^2 - 2knp = 0$ ose

$$p = 2kn \quad (4)$$

paraqet kusht për prekjen e drejtëzës $l: y = kx + n$ dhe parabolës $P: y^2 = 2px$;

3° nëse $D < 0$, d.m.th. $p^2 - 2knp < 0$, drejtëza l dhe parabola P nuk kanë pikë të përbashkët, d.m.th. $l \cap P = \emptyset$.

II. Nëse $k = 0$, barazimi (2) është linear dhe ka zgjidhje të vetme, d.m.th. drejtëza l dhe parabola kanë një pikë të përbashkët. Në këtë rast drejtëza l e ka barazimin $y = n$, d.m.th. është paralele me boshtin x (fig.1).

➤ **Shembulli 1.** Është dhënë drejtëza $l: 2x + 2y - 5 = 0$ dhe parabola $P: y^2 = 10x$. Ta shqyrtojmë pozitën e tyre reciproke.

Zgjidhje. Në rastin tonë $k = -1$, $n = \frac{5}{2}$ dhe $p = 5$. Nëse këto vlera i zëvendësojmë në relacionin

(3) fitojmë: $p^2 - 2knp = 25 - 2(-1) \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = 50 > 0$, pra vijon se drejtëza l dhe parabola kanë dy pika të përbashkëta. ■

➤ **Shembulli 2.** Është dhënë drejtëza $l: 3x + 2y - 9 = 0$ dhe parabola $P: y^2 = 9x$. Ta shqyrtojmë pozitën reciproke dhe nëse kanë pika të përbashkëta t'i caktojmë.

Zgjidhje. Këtu $k = -\frac{3}{2}, n = \frac{9}{2}$ dhe $p = \frac{9}{2}$. Me zëvendësimin në (3) kemi:

$p^2 - 2knp = 81 > 0$, pra vijon se drejtëza l dhe parabola P kanë dy pika të përbashkëta, koordinatat e të cilave janë zgjidhjet e sistemit të barazimeve:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y^2 = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y^2 + 6y - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 9 \\ y_1 = 3, & y_2 = -9 \end{cases}$$

Vijon, pikëprerjet janë $M_1(1,3)$ dhe $M_2(9,-9)$ ■

► **Shembulli 3.** Është dhënë drejtëza $l: x - y + 8 = 0$ dhe parabola $P: y^2 = 14x$. Ta shqyrtojmë pozitën reciproke të tyre.

Zgjidhje. Prej barazimit të parabolës l kemi $k = 1, n = 8$, kurse prej parabolës $P: 2p = 14$ d.m.th. $p = 7$. Me zëvendësimin e këtyre vlerave në relacionin (3) fitojmë: $49 - 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 = 49 - 112 = -63 < 0$, prej ku vijon se parabola dhe drejtëza nuk kanë pika të përbashkëta, d.m.th. $l \cap P = \emptyset$ ■

► **Shembulli 4.** Ta caktojmë vlerën e parametrin m , ashtu që drejtëza $l: mx - 3y + m + 7 = 0$, ta prek parabolën $y^2 = 8x$.

Zgjidhje. Forma eksplicite e drejtëzës l është $y = \frac{m}{3}x + \frac{m+7}{3}$, prej ku $k = \frac{m}{3}$ dhe $n = \frac{m+7}{3}$, kurse prej parabolës $p = 4$. Nëse këto vlera i zëvendësojmë në kushtin për prekje (4) kemi $4 = 2 \cdot \frac{m}{3} \cdot \frac{m+7}{3}$ ose $m^2 + 7m - 18 = 0$, prej ku fitojmë $m_1 = 2$ dhe $m_2 = -9$ ■

► **Shembulli 5.** Është dhënë drejtëza $l: x - 2y + 8 = 0$, e cila e prek parabolën $P: y^2 = 2px$. Ta caktojmë barazimin e parabolës.

Zgjidhje. Prej barazimit të drejtëzës l vijon $k = \frac{1}{2}$ dhe $n = 4$. Tani, prej kushtit për prekje (4) fitojmë $p = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 4$, pra barazimi i parabolës do të jetë $y^2 = 8x$ ■

DETYRA

- Shqyrtoje pozitën reciproke të drejtëzës l dhe parabolës P , kurse pastaj, caktoji pikat e përbashkëta nëse ekzistojnë:
 - $l: 6x - y - 12 = 0$, $P: y^2 = 6x$; b) $l: 2x + 2y + 5 = 0$, $P: y^2 = 10x$;
 - $l: 2x - y + 6 = 0$, $P: y^2 = 8x$.
- Caktoje gjatësisht e kordës që drejtëza l e prenë prej parabolës P , nëse:
 - $l: 2x + y - 2 = 0$ dhe $P: y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{5}x$; b) $l: 2x - 3y + 8 = 0$ dhe $P: y^2 = 8x$.

3. Është dhënë parabola $P: y^2 = 8x$ dhe të dy pikat prej saj $M_1(2, y > 0), M_2(\frac{9}{2}, y > 0)$. Formoje barazimin e kordës M_1M_2 .
4. Shqyrtoje vallë drejtëza l e prek parabolën P , nëse:
- a) $l: 2x - y + 2 = 0, P: y^2 = 16x$; b) $l: x + 4y + 8 = 0, P: y^2 = 2x$.
5. Në parabolën e dhënë P , tërhiq tangjentë paralele me drejtëzën e dhënë l , nëse është:
- a) $P: y^2 = 9x, l: 3x + 2y - 4 = 0$; b) $P: y^2 = \frac{9}{4}x, l: 3x - 4y = -12$.
6. Shkruaje barazimin e tangjentës së parabolës $P: y^2 = 4x$, e cila është normale në drejtëzën $l: x + y + 5 = 0$.
7. Caktoje vlerën e parametrin m , ashtu që drejtëza e dhënë l të jetë tangjenta e parabolës P , nëse është:
- a) $l: x + my + 1 = 0, P: y^2 = x$; b) $l: x - y + m = 0, P: y^2 = 4x$;
c) $l: mx - 2y + 3 = 0, P: y^2 = 6x$.
8. Prej pikës $P(6, 8)$, tërhiq tangjenta të parabolës $P: y^2 = 8x$.
9. Si është barazimi i parabolës P , nëse drejtëza $l: 8x - 3y + 24 = 0$ është tangjentë e saj?
10. Caktoje këndin φ nën të cilin shikohet parabola P prej pikës P , nëse është:
- a) $P(-2, 3), P: y^2 = 8x$; b) $P(-6, -1), P: y^2 = 4x$.
11. Formoje barazimin e tangjentës t të parabolës $P: y^2 = 12x$, e cila me drejtëzën $l: 4x - 2y + 9 = 0$ formon kënd prej 45° .

4.3.12. BARAZIMI I TANGJENTËS DHE NORMALES NË PIKËN E PARABOLËS

Barazimin e tangjentës së parabolës $P: y^2 = 2px$ në një pikë të saj, do ta nxjerrim në të njëjtën mënyrë sikurse te elipsa dhe hiperbola.

Le të jetë dhënë parabola $P: y^2 = 2px$ dhe pika $T(x_1, y_1)$ që shtrihet në pikën P (fig.1). Barazimi i tangjentës le të jetë

$$y = kx + n \quad (1)$$

Duhet ta caktojmë koeficientin e drejtimit k dhe n .

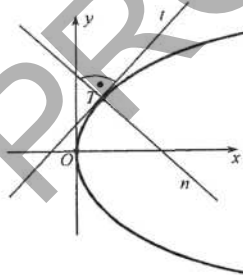


fig.1

Me mënyrën analoge të asaj me të cilën i caktuam tangjentën e elipsës dhe hiperbolës, fitojmë

$$k = \frac{p}{y_1}, \quad n = \frac{px_1}{y_1}. \quad (2)$$

Me zëvendësimin e këtyre vlerave për k dhe n në barazimin (1) e fitojmë barazimin

$$t: y_1 y = p(x + x_1) \quad (3)$$

Barazimi (3) është barazimi i tangjentës së parabolës $P: y^2 = 2px$, në pikën $T(x_1, y_1) \in P$.

Përpiku për ushtrime ta bëjsh tërë mënyrën për fitimin e barazimit (3).

Tani mund ta shkruajmë edhe barazimin e normales së parabolës në pikën $T(x_1, y_1) \in P$.

Koeficienti i drejtimit të normales në pikën T është: $k_n = -\frac{y_1}{p}$, pra barazimi i normales së parabolës do të jetë:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \quad (4)$$

ose

$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0 \quad (5)$$

➤ **Shembulli 1.** Është dhënë parabola $P: y^2 = 12x$ dhe pika $T(3, 6)$ prej saj. Ta formojmë barazimin e tangjentës në pikën T .

Zgjidhje. Në rastin e dhënë kemi $p = 6, x_1 = 3, y_1 = 6$. Me zëvendësimin e këtyre vlerave në barazimin (3) fitojmë $(t): 6y = 6(x + 3)$ ose $t: x - y + 3 = 0$ ■

➤ **Shembulli 2.** Në pikën $T(\frac{25}{4}, 5)$ prej parabolës $P: y^2 = 4x$ t'i caktojmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales.

Zgjidhje. Kemi $p = 2, x_1 = \frac{25}{4}$ dhe $y_1 = 5$. Këto vlera i zëvendësojmë në barasitë (3) dhe (4) dhe i fitojmë barazimet e tangjentës dhe normales:

$$t: 5y = 2(x + \frac{25}{4}) \quad \text{ose} \quad 4x - 10y + 25 = 0;$$

$$n: 2(y - 5) + 5(x - \frac{25}{4}) = 0 \quad \text{ose} \quad 20x + 8y - 165 = 0 \quad \blacksquare$$

➤ **Shembulli 3.** Është dhënë barazimi i parabolës $P: y^2 = 10x$. T'i shkruajmë barazimet e tangjenteve në pikëprerjet e drejtëzës $l: y = 4x - 5$ dhe parabolës.

Zgjidhje. Me zgjidhjen e sistemit të barazimeve $\begin{cases} y^2 = 10x \\ y = 4x - 5 \end{cases}$, i fitojmë pikëprerjet

$M_1(\frac{5}{2}, 5)$ dhe $M_2(\frac{5}{8}, -\frac{5}{2})$, pra me zëvendësimin në barazimin (2) i fitojmë barazimet e tangjenteve:

$$t_1: 2x - 2y + 5 = 0 \quad \text{dhe} \quad t_2: 8x + 4y + 5 = 0$$

■

➤ **Shembulli 4.** Janë dhënë parabola $P: y^2 = \frac{20}{3}x$ dhe elipsa $E: \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$. T'i caktojmë barazimet e tangjenteve të përbashkëta.

Zgjidhje. Barazimet e tangjenteve të përbashkëta le të jenë prej formës $y = kx + n$. Duke e shfrytëzuar kushtin për prekje të drejtëzës dhe parabolës: $p = 2kn$, përkatësisht drejtëzës dhe elipsës:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2, \text{ e fitojmë sistemin e barazimeve: } \begin{cases} p = 2kn \\ a^2k^2 + b^2 = n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2kn = \frac{10}{3} \\ 45k^2 + 20 = n^2 \end{cases}$$

zgjidhjet e të cilëve janë $k = \pm \frac{1}{3}$ dhe $n = \pm 5$. Tangjentet e përbashkëta janë vetëm drejtëzat $(t_1): x - 3y + 15 = 0$ dhe $t_2: x + 3y + 15 = 0$. Përpiku ta sqarosh përfundimin. ■

DETYRA

- Formo barazimin e parabolës P në pikën D prej parabolës, nëse është:
 - $y^2 = 7x$ dhe $T(\frac{7}{4}, y > 0)$;
 - $y^2 = 20x$ dhe $T(\frac{5}{4}, y > 0)$;
- Drejtëza l është tangjenta e parabolës P . Cakto pikën prekëse, nëse është:
 - $l: 7x + 8y + 8 = 0$ dhe $P: y^2 = \frac{7}{2}x$;
 - $l: x + 4y + 20 = 0$ dhe $P: y^2 = 5x$;
 - $l: x + 4y + 4 = 0$ dhe $P: y^2 = x$;
 - $l: 4x - 2y + 3 = 0$ dhe $P: y^2 = 6x$.
- Caktoje këndin që e formon tangjenta t e tërhequr në pikën D prej parabolës P me kahen pozitive të boshtit x , nëse është:
 - $T(2, y > 0)$ dhe $P: y^2 = 8x$;
 - $T(\frac{1}{2}, y < 0)$ dhe $P: y^2 = 6x$.
- Caktoje pikën M prej parabolës $P: y^2 = 11x$, në të cilën tangjenta me kahen pozitive të boshtit x formon kënd prej 120° .
- Shkruaje barazimin e normales n të parabolës P në pikën e parabolës M , nëse është:
 - $M(4, 2)$ dhe $P: y^2 = x$;
 - $M(20, 10)$ dhe $P: y^2 = 5x$;
 - $M(\frac{5}{2}, -5)$ dhe $P: y^2 = 10x$.
- Drejtëza $l: 2x - y - 12 = 0$ e prenë parabolën $P: y^2 = 4x$ në dy pika. Në pikëprerjet janë tërhequr tangjentet e parabolës. Cakto pikëprerjen e tangjenteve.
- Caktoji barazimet e tangjenteve të përbashkëta të lakoreve $x^2 + y^2 = 2$ dhe $y^2 = 8x$.
- Caktoji tangjentat e përbashkëta të elipsës $E: 20x^2 + 45y^2 = 900$ dhe parabolës $P: y^2 = \frac{20}{3}x$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM (4.3.)

- Është dhënë vija rrethore $K : x^2 + y^2 - 9 = 0$. Cilat prej pikave shtrihen, kurse cilat nuk shtrihen në vijën rrethore: a) A(0,0); b) B(3,0); c) C(0,-3); ç) D(1,1)?
- Shkruaje barazimin e vijës rrethore K me rreze r dhe qendër S , nëse është:
a) $r = 3, S(0,0)$; b) $r = 5, S(0,2)$; c) $r = \frac{3}{4}, S(1, -\frac{1}{2})$; ç) $r = 4, S(-3,0)$.
- Shkruaje barazimin e vijës rrethore, me rreze $r = 6$, që kalon nëpër pikën N(0,-4) dhe nëpër fillimin e koordinatave.
- Formo barazimin e vijës rrethore K , që kalon nëpër tri pika:
a) A(1,4), B(-7,4), C(2,-5); b) A(7,7), B(0,8), C(-2,4).
- Cakto rrezen r dhe koordinatat e qendrës S të vijës rrethore K :
a) $K : x^2 + y^2 - 4y - 96 = 0$; b) $K : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$;
c) $K : 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 131 = 0$;
- Formo barazimin e vijës rrethore K me rreze $r = 4$, kurse qendra është në pikëprerjen e drejtëzave $l_1 : 4x + y - 34 = 0$ dhe $l_2 : x + 4y - 16 = 0$.
- Shkruaje barazimin e vijës rrethore K , me qendër S(-3,4), e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave.
- Shkruaje barazimin e vijës rrethore K , e cila e prek boshtin x dhe e ka qendrën S(2,-3).
- Shkruaje barazimin e vijës rrethore K , e cila e prek boshtin y dhe e ka qendrën S(-4,-2).
- Formo barazimin e vijës rrethore K , e cila e prek drejtëzën $l : 2x - 5y + 43 = 0$ dhe e ka qendrën S(3,4).
- Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila është koncentrike me vijën rrethore $K : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ dhe e prek drejtëzën $l : 3x - 4y + 7 = 0$.
- Drejtëza $l : 4x + 3y - 52 = 0$ është tangjenta e vijës rrethore $K : x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$. Caktoje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën prekëse dhe është paralele me drejtëzën $l : 10x - 5y + 3 = 0$.
- Shqyrto pozitën reciproke të vijave rrethore:
a) $K_1 : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ dhe $K_2 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$;
b) $K_1 : x^2 + y^2 - 10x - 20 = 0$ dhe $K_2 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.
- Caktoji barazimet e tangjenteve të përbashkëta të vijave rrethore:
a) $K_1 : x^2 + y^2 = 9$ dhe $K_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$;
b) $K_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ dhe $K_2 : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.
- Caktoje këndin nën të cilin vuja rrethore $K : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, shikohet prej pikës P(9,2).
- * Shkruaje barazimin e vijës rrethore K , të brendashkruar në trekëndësh me brinjë $y = 0$, $3x - 4y + 12 = 0$ dhe $5x + 12y - 100 = 0$.
- Nën cilin kënd priten vijat rrethore $K_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$ dhe $K_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$?
- Shkruaje barazimin e elipsës E , nëse:
a) gjysmëboshtet janë 9 dhe 5; b) boshti i madh është 20, kurse ekscentriciteti numerik është $\frac{12}{13}$;
c) largësia fokale është $4\sqrt{11}$, kurse ekscentriciteti numerik është $\frac{\sqrt{11}}{6}$.
- Caktoji koordinatat e kulmeve dhe koordinatat e fokusëve të elipsës $E : 16x^2 + 25y^2 = 400$.

20. Caktoje abshisën e pikës $M(x,1)$ prej elipsës $E : 3x^2 + 4y^2 = 12$.
21. Caktoji pikëprerjet e elipsës $E : 36x^2 + 64y^2 = 2304$ dhe drejtëzës $y = x$.
22. Për cilën vlerë të parametrin n drejtëza $y = 2x + n$ ka një pikë të përbashkët me elipsën $E : 24x^2 + 30y^2 = 720$?
23. Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $E : 2x^2 + 3y^2 = 120$, e cila në boshtet koordinative prenë segmente të barabartë.
24. Shkruaji barazimet e tangjentave të elipsës $E : x^2 + 2y^2 = 6$, të tërhequra prej pikëprerjeve të drejtëzave $l_1 : 7x - 3y - 1 = 0$ dhe $l_2 : y - 2 = 0$.
25. Nëpër fokusin $F_1(-c,0)$ të elipsës $E : 16x^2 + 25y^2 = 400$, është tërhequr kordë e cila me kahen pozitive të boshtit x formon kënd prej 30° . Shkruaje barazimin e kordës.
26. Formo barazimin e elipsës E , tangjentat e të cilës janë $t_1 : 4x - 5y + 25 = 0$ dhe $t_2 : 9x + 20y - 75 = 0$.
27. Për cilën vlerë të parametrin m , drejtëza $l : x - my - 5 = 0$ është tangjentë e elipsës $E : 9x^2 + 16y^2 = 144$?
28. Caktoji pikëprerjet e vijës rrethore $K : (x-5)^2 + y^2 = 25$ dhe elipsës $E : x^2 + 2y^2 = 36$.
29. Nën cilin kënd priten elipsa $E : x^2 + 3y^2 = 36$ dhe vija rrethore $K : x^2 + y^2 - 24x + 54 = 0$?
30. Shkruaji barazimet e tangjenteve të përbashkëta të elipseve $E_1 : 4x^2 + 5y^2 = 20$ dhe $E_2 : 5x^2 + 4y^2 = 20$.
31. Shkruaji barazimet e tangjenteve të përbashkëta të vijës rrethore $K : (x - \frac{7}{2})^2 + y^2 = \frac{45}{4}$ dhe elipsës $E : 3x^2 + 4y^2 = 12$.
32. Nën cilin kënd shikohet elipsa $E : x^2 + 2y^2 = 6$ prej qendrës së vijës rrethore $K : x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$?
33. Cilat lakore të rendit të dytë janë paraqitur me barazimet:
a) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; b) $y = \frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$; c) $x = \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$?
34. Shkruaje barazimin e hiperbolës, nëse janë dhënë:
a) $c = 3$ dhe $\varepsilon = \frac{3}{2}$; b) $2a = 48, \varepsilon = \frac{13}{12}$; c) $\varepsilon = \sqrt{2}$, kurse $M(-5,3)$ është pikë e hiperbolës.
35. Është dhënë elipsa $E : 9x^2 + 25y^2 = 225$. Shkruaje barazimin e hiperbolës e cila është konfokale me elipsën e dhënë dhe ekscentriciteti numerik i së cilës është $\varepsilon = 2$.
36. Është dhënë barazimi i hiperbolës barabrinjëse $H : x^2 - y^2 = 8$. Formoje barazimin e hiperbolës konfokale e cila kalon nëpër pikën $M(-5,3)$.
37. Caktoji koordinatat e pikëprerjeve të hiperbolës H dhe drejtëzës l , nëse është:
a) $H : 4x^2 - y^2 = 36$ dhe $l : x - y + 3 = 0$; b) $H : 3x^2 - y^2 = 3$ dhe $l : 2x - y - 1 = 0$;
c) $H : x^2 - y^2 = 9$ dhe $l : 2x - y - 2 = 0$.
38. Shkruaje barazimin e hiperbolës e cila kalon nëpër pikat:
a) $M_1(15,9)$ dhe $M_2(13,5)$; b) $M_1(5,3)$ dhe $M_2(8,-10)$.

39. Në barazimin e drejtëzës $l: x - y + m = 0$, caktoje vlerën e parametrin m , ashtu që drejtëza të jetë tangjenta e hiperbolës $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$.
40. Në barazimin e drejtëzës $l: mx - 3y - 24 = 0$, caktoje parametrin m , ashtu që drejtëza l të jetë tangjenta e hiperbolës $H: x^2 - y^2 = 36$.
41. Shkruaje barazimin e tangjentës së hiperbolës $H: 3x^2 - y^2 = 3$, e cila me drejtëzën $l: 3x + y = 0$, formon kënd prej 45° .
42. Shkruaji barazimet e tangjenteve të përbashkëta të lakoreve të rendit të dytë: $25x^2 + 100y^2 = 4$ dhe $x^2 - 3y^2 = 1$.
43. Shkruaji barazimet e tangjentave të përbashkëta të lakoreve $3x^2 - 4y^2 = 12$ dhe $2x^2 + 2y^2 = 1$.
44. Caktoje këndin ndërmjet tangjenteve të tërhequra prej pikës $M(1,0)$ të hiperbolës $H: x^2 - 2y^2 = 2$.
45. Cilat lakore të rendit të dytë i paraqesin barazimet:
- a) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; b) $x = \frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$; c) $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$?
46. Shkruaje barazimin e elipsës e cila është konfokale me hiperbolën $H: x^2 - y^2 = 8$ dhe kalon nëpër pikën $M(4,6)$.
47. Caktoji koordinatat e fokusit dhe barazimet e direktrisave të parabolave:
- a) $P: y^2 = -8x$; b) $P: y^2 = -6x$; c) $P: x^2 = 10y$; d) $P: x^2 = 12y$.
48. Cakto gjatësinë e kordës të cilën e prenë parabola P prej drejtëzës së dhënë l :
- a) $P: y^2 = 4x$, $l: 2x - y - 4 = 0$; b) $P: y^2 = 18x$, $l: x - y + 4 = 0$.
49. Shkruaje barazimin e parabolës me kulm në fillimin e koordinatave dhe simetrike në lidhje me boshtin x , kurse kalon nëpër pikën: a) $M(2,-6)$; b) $M(-5,-5)$.
50. Caktoji pikëprerjet e parabolës $P: y^2 = 4x$ me drejtëzën:
- a) $l: 2x - y = 0$; b) $l: x - y + 5 = 0$.
51. Caktoji pikëprerjet e lakoreve:
- a) $y^2 = 2x$ dhe $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$; b) $y^2 = 8x$ dhe $x^2 + 2y^2 = 36$;
c) $y^2 = 6x$ dhe $4x^2 - 3y^2 = 36$.
52. Është dhënë tangjenta $t: 3x - y + 4 = 0$ e parabolës P . Caktoje barazimin e parabolës.
53. Është dhënë parabola $P: y^2 = 4x$ dhe pika $M(-2,4)$. Caktoje pikëprerjen e e tangjenteve të tërhequra prej prerjes së parabolës P me drejtëzën të përcaktuar me pikat $M_1(-10,9)$ dhe $M_2(14,-7)$.
54. Nën cilin kënd priten lakoret e rendit të dytë:
- a) $y^2 = 8x$ dhe $(x+2)^2 + y^2 = 32$; b) $2y^2 = 9x$ dhe $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$.
55. Shkruaji barazimet e tangjenteve të përbashkëta të lakoreve:
- a) $y^2 = 20x$ dhe $9x^2 + 16y^2 = 144$; b) $y^2 = 9x$ dhe $18x^2 + 9y^2 = 162$;
c) $y^2 = 16x$ dhe $9x^2 - 25y^2 = 225$; d) $y^2 = 16x$ dhe $12x^2 - 4y^2 = 48$.
56. Cilat lakore të rendit të dytë janë paraqitur me barazimet:
- a) $y = 2\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{-x}$; c) $x = \sqrt{-2y}$.

PROSVETNO DELO

PËRGJIGJE DHE ZGJIDHJE TË DETYRAVE

TEMA 1

1.1.1.

- 1.a) $D=\mathbb{R}$, b) 2. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, c) $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$, ç) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, d) $D=[-3, \infty)$. 2. a) monotonisht rritet (fig.1), b) monotonisht zvogëlohet (fig.2), c) konstante (fig.3). 3. a) $5^{\sqrt{3}} > 5^{\sqrt{2}}$, b) $(1,5)^{\frac{3}{4}} > (1,5)^{\frac{2}{3}}$, c) $(0,5)^{\sqrt{2}} > (0,5)^{\sqrt{3}}$.

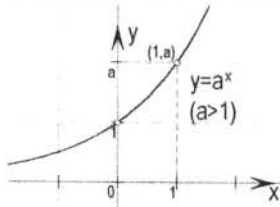


fig. 1

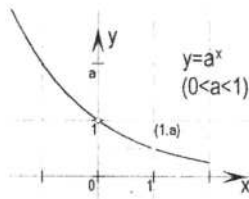


fig. 2

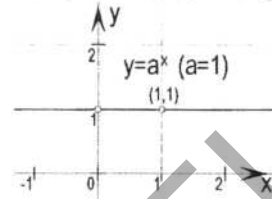


fig. 3

4. Simetrike në lidhje me boshtin Ox (fig. 4); 5. Grafikët janë paraqitur në fig. 5;

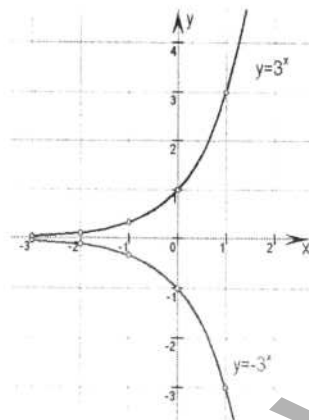


fig. 4

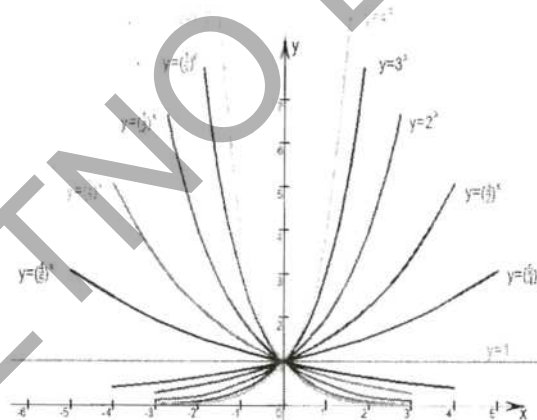


fig. 5

6. Grafikët e funksioneve janë paraqitur në fig. 6. 7. Grafikët janë paraqitur në fig. 7.

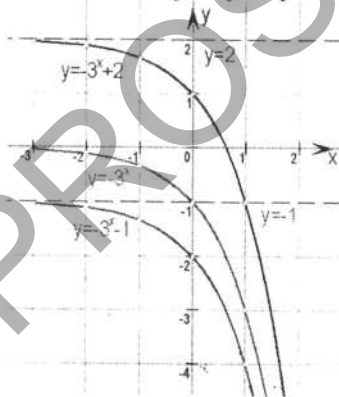


fig. 6

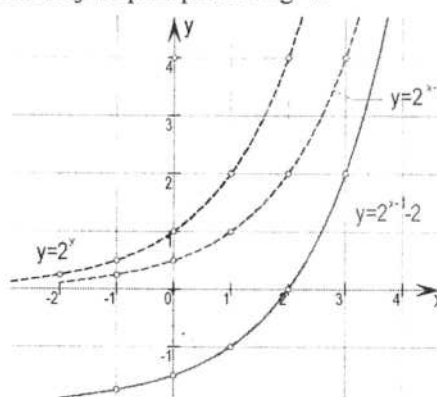


fig. 7

8. Grafikët janë paraqitur në fig. 8.

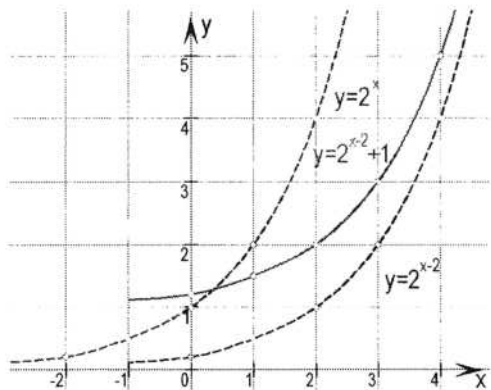


fig. 8

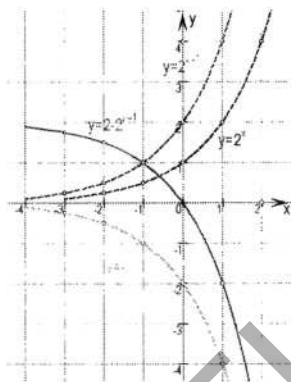


fig. 9

9. Radha e të vizatuarit e grafikëve (fig. 9) është $y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$, $y = -2^{x+1}$, $y = -2^{x+1}+2$;

1. 1. 2.

1. a) 2, b) -3, c) -3; 2. a) $\frac{1}{2}$, b) 4, c) 6; 3. a) 7, b) 1; 4. a) -1 dhe 2, b) 1 dhe 2; 5. -2; 6. a) 1, b) 2; 7. a) 2, b) -1;
8. a) 1, b) 0 dhe 1; 9. a) 1, b) 1; 10. 0 dhe $\frac{1}{9}$.

1. 2. 1.

1. a) $\log_2 32 = 5$, b) $\log_3 1 = 0$, dhe $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, c) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2} = -1$, d) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$; 2. a) $4^3 = 64$, b) $10^{-2} = \frac{1}{100}$,
c) $0,2^{-2} = 25$, c) $(\sqrt{3})^4 = 9$, d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$; 3. a) 2, b) -3, c) 8, c) -2; 4. a) 8, b) $\frac{1}{3}$, c) 2, c) 1,5;
5. a) 32, b) 6, c) 0,008, c) 9; 6. a) 100, b) $\frac{6}{5}$; * 8. a) 0, b) 0.

1. 2. 2.

1. a) 2,37; b) 1,897; c) 0,6; c) -0,6; d) -1,86742. 2. a) 1,27673; b) 30,62; c) 2003;
c) 0,0034. 3. a) 1,2932; b) -0,1505; c) 1,602318088. 4. a) $\lg 5 + \lg a + \lg c$, b) $\lg 2 + \lg a + \lg d + \lg p - \lg 3 - \lg b - \lg c$, c) $\lg a + 2 \lg b + 3 \lg c$; c) $\lg c + \frac{5}{3} \lg a + \frac{4}{3} \lg b$; d) $\lg 2 + \lg a + 3 \lg b - \frac{2}{5} \lg c$. 5. a) $\lg x = 3,12121 \Rightarrow x = 1322$;

$$b) \lg x = \frac{1}{2} \left(\lg 5 + \frac{1}{2} \left(\lg 4 + \frac{1}{2} \left(\lg 3 + \frac{1}{2} \lg 2 \right) \right) \right) \Rightarrow \lg x = 0,578454531 \Rightarrow x = 3,788388688; c) 13,875.$$

1. 2. 3.

1. a) 3, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{12}$, ç) 3. 2. a) $\frac{2}{3}$, b) 2, c) $\frac{1}{2}$. 3. a) $3\log_5 2$, b) $\frac{1}{2} \log_2 3$. 4. a) $\frac{2}{3}b$, b) $\frac{2}{3}b$. 5. a) $\log_{17} 7$, b) $\log_5 4$.

6. $\log_5 7 \cdot \log_6 5 \cdot \log_3 6 + 1 = \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 3} + 1 = \frac{\lg 7}{\lg 3} + \frac{\lg 3}{\lg 3} = \frac{\lg 7 + \lg 3}{\lg 3} = \frac{\lg 7 \cdot 3}{\lg 3} = \frac{\lg 21}{\lg 3} = \log_3 21.$

7. $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} = \log_x a + \log_x b + \log_x c = \log_x (a \cdot b \cdot c) = \log_x abc.$

8. $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_a x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{2}{\log_a x} = \frac{3}{\log_a x} = 3 \log_x a.$

1. 2. 4.

1. a) $D = (1, \infty)$, b) $D = (0, 2)$, c) $D = (0, \infty)$, ç) $D = (2, \infty)$; 2. a) monotonisht rritet, b) monotonisht zvogëlohet, c) monotonisht zvogëlohet, ç) monotonisht rritet; 3. a) $\ln 5 > \ln 3$, b) $\log_3 3 > \log_3 1$, c) $\log_5 \pi > \log_5 \sqrt{5}$, ç) $\log_{0,5} \frac{1}{5} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.

4. Grafikët e funksioneve janë paraqitur në fig. 1. Këtu baza e logaritmit $a > 1$, nëse ajo rritet grafiku i funksionit përkatës është më afër deri te boshtet e koordinatave, domethënë funksioni më ngadal rritet.

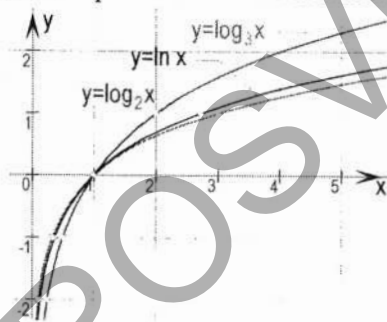


fig. 1

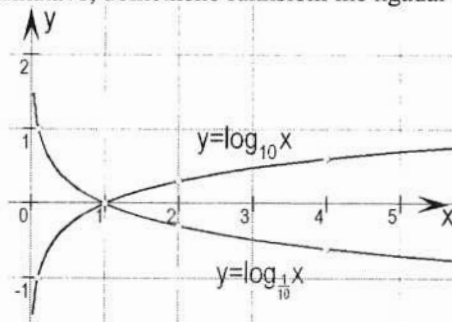


fig. 2

5. Grafikët janë paraqitur në fig. 2. Te ato ekziston simetri në lidhje me boshtin x .
6. Grafikët janë paraqitur në fig. 3. Te ato ekziston simetri në lidhje me boshtin y .

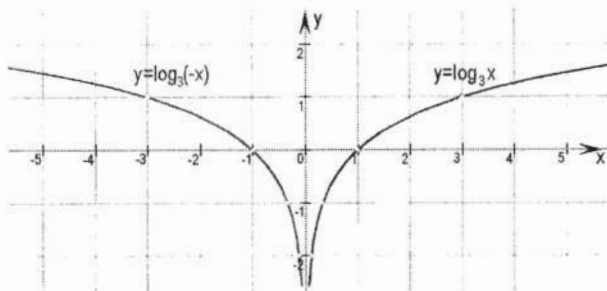


fig.3

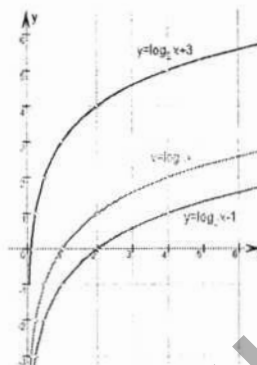


fig.4

7. Së pari e vizaton grafikun e funksionit $y = \log_2 x$, pastaj atë të funksionit $y = \log_2 x - 1$, i zhvendosur për një njësi poshtë edhe atë të funksionit $y = \log_2 x + 3$, i zhvendosur për tre njësi lartë. Grafikët janë paraqitur në fig. 4.

*8. Në fig. 5 është paraqitur grafiku i funksionit $y = 1 - \log_2 x$, ku radha e të vizatuarit është:

$$y = \log_2 x, y = -\log_2 x, y = 1 - \log_2 x.$$

*9. Në fig. 6 është paraqitur grafiku i funksionit $y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 2$, ku radha e të vizatuarit është:

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x, y = -\log_{\frac{1}{3}} x, y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 2.$$

*10. Në fig. 7 është paraqitur grafiku i funksionit $y = \log_2(-x-1) + 1$, ku radha e të vizatuarit është:

$$y = \log_2 x, y = \log_2(x+1), y = \log_2(-(x+1)), y = 1 + \log_2(-x-1).$$

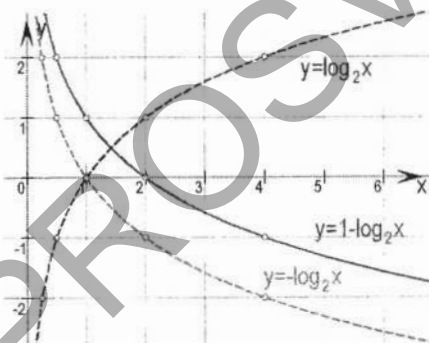


fig. 5

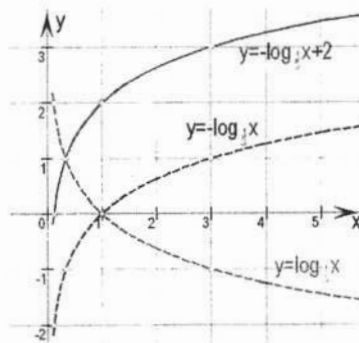


fig. 6

11. Grafikët e funksionit eksponencial dhe logaritmik janë paraqitur në fig. 8. Ato janë simetrike në lidhje me drejtëzën $y = x$, simetralja e kuadrantit të parë dhe të tretë, shikoje shembullin 7.

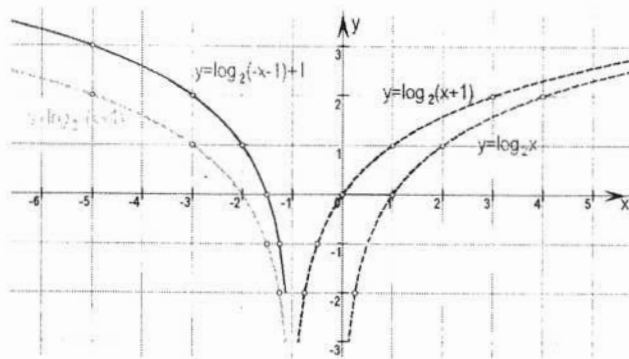


fig. 7

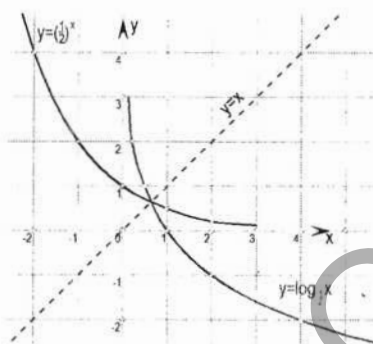


fig.8

I. 2. 5.

1. a) 9, b) 18; 2. a) 4, b) 2; 3. a) 12, b) 5; 4. a) $\frac{1}{10}$ dhe 100, b) $\sqrt{0,001}$ dhe 10; 5. a) 1000 dhe $\sqrt{0,00001}$, b) 10 dhe 100; 6. a) 16, b) 2; 7. a) $\lg 5^{x+1} = \lg 2 \Leftrightarrow (x+1)\lg 5 = \lg 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg 5} - 1 \Rightarrow x \approx -0,57$; b) 1, c) 0,1 dhe 10;
8. $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = x \log_2 2 + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = \log_2[2^x \cdot (2^{x+1} - 3)] \Rightarrow 2^{2x} + 4 = 2^x \cdot (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow 2^{2x} + 4 = 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM 1.

- a) a, b) $a^{\sqrt{3}-4}$, c) a^2 . 2. b) Grafiku i funksionit të kërkuar $y = 2 - 2^{x+1}$ është dhënë në fig. 1.



fig. 1

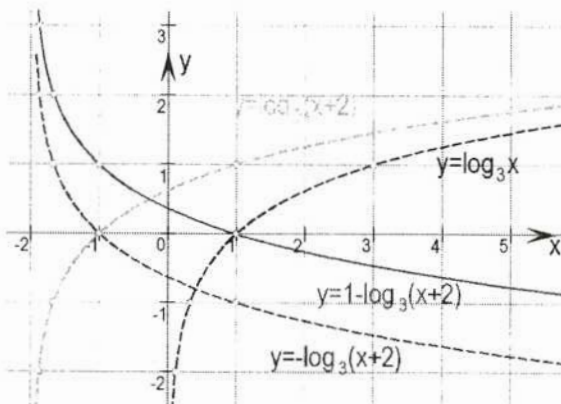


fig. 2

1. a) -3; b) 2,75; c) 1. 4. a) -3; b) 1; c) -3. 5. a) $\frac{4 \pm \sqrt{14}}{2}$; b) $\frac{17}{13}$. 6. a) 3, b) 2. 7. a) 1; b) 4. 8. a) 0 dhe $\frac{1}{9}$; b) 3.

9. a) $\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}$, b) 5; 8. 10. a) -2; 2; $\frac{1}{3}$; b) 2; 1,5; 2; c) 1,5; 6. 11. b) Grafiku i funksionit $y = 1 - \log_3(x+2)$ është dhënë në fig. 2. 12. a) 0,125, b) 256. 13. a) Për barazimin $\log_{x-2}(x^3 - 56) = 3$, i kemi këto kushte: $x^3 - 56 > 0$, $x - 2 > 0$ dhe $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x^3 > 56 \wedge x > 2 \wedge x \neq 3$, domethënë zgjidhjet e këtij barazimi patjetër duhet t'i kënaqin të njëjtat. Barazimi logaritmik është ekuivalent me barazimin: $(x - 2)^3 = x^3 - 56 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, por vetëm $x_2 = 4$ është zgjidhje. b) -7 dhe 9. 14. a) $\lg(x+2) + \lg(x-1) = \lg 4 \Leftrightarrow \lg(x+2)(x-1) = \lg 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 2$, prej të cilëve vetëm $x_2 = 2$ është zgjidhje, b) $\lg(x+1) = \lg 6 - \lg x \Leftrightarrow \lg(x+1) = \lg \frac{6}{x} \Leftrightarrow x+1 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$ vetëm $x_2 = 2$ është zgjidhje.

15. a) 0,1 dhe 100. b) $\frac{1}{\lg x} = 2 + \lg \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\lg x} = 2 + \lg 1 - \lg x \Leftrightarrow \frac{1}{\lg x} = 2 + 0 - \lg x$. Me zëvendësimin $\lg x = y$ fitohet barazimi: $y^2 - 2y + 1 = 0$, zgjidhja e të cilit është $y = 1$, prej ku $x = 10$ është zgjidhje e barazimit të dhënë. 16. a) $\sqrt{5}$ dhe 25. b) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x} \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 x = \log_2 x \cdot (\log_2 2 + \log_2 x) \Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \log_2 x + (\log_2 x)^2$. Me zëvendësimin $\log_2 x = y$, barazimi sillet në $(\log_2 x)^2 = 2$, zgjidhjet e të cilit janë: $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$. 17. a) 27, b) 27. 18. a) 4, b) 9. 19. Udhëzim. Shfrytëzoje identitetin themelor logaritmik, në të dy rastet e fiton barazimin katror: $x^2 + x - 6 = 0$. Zgjidhjet janë: nën a) 3, b) 3. 20. $2^{2+\lg x} + 2^{\lg x} = 20 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^{\lg x} + 2^{\lg x} = 20$. Me zëvendësimin $y = 2^{\lg x}$, barazimi i dhënë bëhet ekuivalent me barazimin: $5y = 20 \Rightarrow y = 4$. Domethënë: $2^{\lg x} = 4 \Leftrightarrow 2^{\lg x} = 2^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 100$.

TEMA 2

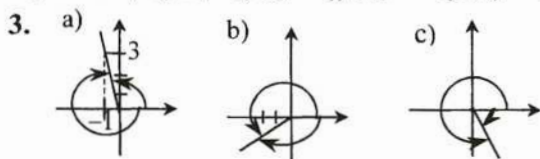
2.1.1

1. a) 150° ; b) $\frac{\pi}{6}$. 2. a) -185° ; b) $\frac{5\pi}{8}$. 3. a) 150° ; b) $-\frac{3\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{2}$. 4. a) $-270^\circ + 0 \cdot 360^\circ$;
b) $90^\circ + 1 \cdot 360^\circ$; c) $-240^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$ ose $120^\circ + (-3) \cdot 360^\circ$; ç) $5 \cdot 360^\circ$; d) $-231^\circ + (-7) \cdot 360^\circ$ ose $129^\circ + (-8) \cdot 360^\circ$. 5. a) 0; -330° ; b) 0; 45° ; c) 0; 120° ; ç) 2; 80° ; d) 0; -12° ; e) 0; 15° ; f) $+1$; 340° ; g) $+3$.
6. a) $15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$; b) $-75^\circ = -\frac{5\pi}{12}$; c) $\frac{7\pi}{12}$; ç) $-\frac{3\pi}{4}$; d) $\frac{5\pi}{3}$; e) $\frac{8\pi}{9}$; f) $\frac{5\pi}{2}$;
g) $-\frac{13\pi}{6}$; h) $\frac{52\pi}{9}$; i) $-\frac{125\pi}{9}$; j) $\frac{2\pi}{5}$; 7. a) $\pi + 7 \cdot 2\pi$; b) $\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$; c) $\frac{9\pi}{5} - 2 \cdot 2\pi$; ç) $\frac{7\pi}{8} + 2\pi$; d) $\frac{5\pi}{6} - 6\pi$. 8. a) 75° ; b) 765° ; c) -960° ; ç) 930° ; d) -2070° ; e) $-342^\circ 30'$. 9. a) 15° ;
 $\frac{\pi}{12}$; b) 20° ; $\frac{\pi}{9}$; c) 120° ; $\frac{2\pi}{3}$. 10. a) 720° ; 4π ; b) 8640° ; 48π . 11. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{12}$.

2.1.2

1. a) kuad. I; b) II; c) IV; ç) IV; d) IV; e) III; f) I; g) II; h) II.

2. a) kuad. I; b) II; c) II; ç) III; d) IV; e) II; f) III.



4. a) 0, 1, 0, nuk ekziston; b) 1, 0, nuk ekziston, 0;

c) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, -3, $-\frac{1}{3}$ ç) 0, -1, 0 nuk

ekziston; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, -1 f) -1, 0,

nuk ekziston, 0; g) $-\frac{5}{\sqrt{29}}$, $\frac{2}{\sqrt{29}}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{2}{5}$.

2.1.3

2. Ka dy pika: simetrike në lidhje me boshtin x. 3. a) dhe b).

2.1.4

3. a) I dhe III; b) në asnjërin; c) I dhe II. 4. a) III dhe II; b) I dhe II; c) III dhe IV. 5. a) pozitiv;

b) pozitiv; c) negativ; ç) negativ; d) negativ; e) negativ. 6. a) pozitiv; b) pozitiv; c) negativen.

2.1.5

1.

	$0 (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6} (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4} (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3} (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2} (90^\circ)$	$\pi (180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2} (270^\circ)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nuk ekziston	0	nuk ekziston
$\operatorname{ctg} \alpha$	Nuk ekziston	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Nuk ekziston	0

3. a) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 4; c) 1. 4. a) po; b) po; c) jo. 5. a) 2; b) nuk ekziston; c) 0.

6. a) saktë, saktë, saktë; b) saktë, saktë, saktë; c) saktë, saktë, saktë.

2.1.6

1. $\sin \alpha$; 2. $\sin \alpha \cos \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; 3. $\cos \alpha, \alpha \neq (2k+1)\pi$; 4. $\frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi$ 5. $\frac{2}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$;

16. Zgjidhje: $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2 \operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^2 \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \right) \left(2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) - 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$
 $= \frac{\cos^2 \alpha \cdot (\sin \alpha + 2 \cos \alpha)(2 \sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} - 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$

17. Zgjidhje: $\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$

2.1.7

1.

I dhënë →	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$		$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	

2. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$, $\operatorname{ctg} \alpha = -1$

3.

$\sin \alpha = -\frac{7}{25}$, $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$

4. $\frac{49}{81}$ 6. $\frac{8}{13}$

7. $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - 2}{\operatorname{tg} \alpha + 1}$ **Udhëzim:** Numëruesin dhe emëruesin pjesëtoji me $\cos \alpha$. 8. $\frac{8}{7}$

9. $\frac{3}{5}$ dhe $\frac{4}{5}$

2.1.8.

2. a) po; b) po; c) po. 3. a) çift; b) as çift, as tek; c) çift; ç) tek; d) tek; e) as çift, as tek. 4. b) **Zgjidhje:** Le të jenë $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, atëherë për $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$

5. a) $\sin 235^\circ < \sin 359^\circ < \sin 133^\circ < \sin 18^\circ$; b) $\cos \frac{7\pi}{6} < \cos \frac{3\pi}{4} < \cos \frac{11\pi}{12} < \cos 0$; c) $\operatorname{tg} 277^\circ < \operatorname{tg} 120^\circ < \operatorname{tg} 0^\circ < \operatorname{tg} 14^\circ$;

ç) $\operatorname{ctg} 350^\circ < \operatorname{ctg} 110^\circ < \operatorname{ctg} 215^\circ < \operatorname{ctg} 24^\circ$; d) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} < \operatorname{ctg} 0 < \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} < \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$

6. a) negativ; b) negativ; c) pozitiv; ç) pozitiv; d) negativ; e) negativ.

7. a) negativ; b) negativ; c) negativ

2.1.9

1. a) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{ctg} 150^\circ = \sqrt{3}$

b) $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$; $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \sqrt{3}$;

c) $\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 315^\circ = -1$; $\operatorname{ctg} 315^\circ = -1$

2.

këndi f-ioni	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg	-1	-1	1	-1	1
ctg	-1	-1	1	-1	1

3. 0 4. $\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6. 0

7. $2\sin \alpha$. **Udhëzim:** shfrytëzoje funksionin çift të kosinusit. Shembulli,
 $\cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha)$

8. $-\cos \alpha$. 9. $\sin \alpha$. 10. $2\sin \alpha$

2.2.3.

4. ç) Zgjidhje.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$
$3 \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$	3	0	-3	0	3
	max	zero	min	zero	max

Amplituda për këtë funksion është 3; perioda themelore është

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \text{ intervali themelor është } [-\frac{\pi}{2}, 4\pi - \frac{\pi}{2}] \text{ d.m.th.}$$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$; zerot janë në pikat $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ dhe $x = \frac{7\pi}{2}$; maksimumi $y=3$ është në $x = \frac{\pi}{2}$, kurse minimumi $y=-3$ është në $x = \frac{5\pi}{2}$ (fig.3).

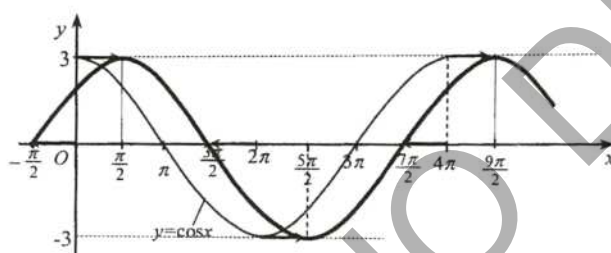


fig.3

2.3.1.

2. a) $\cos \alpha$; 3. $\sqrt{2} \cos \alpha$; 4. 1; 5. $5\sqrt{3} - 8$; 6. $-\frac{13\sqrt{3}+24}{3}$; 7. $\frac{5\sqrt{3}+12}{26}$; 8. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

2.3.2

1. a) $\frac{120}{169}$; b) $\frac{12}{13}$. 2. a) $\frac{4}{5}$; b) $-\frac{3}{5}$; c) $-\frac{4}{3}$; ç) $-\frac{3}{4}$. 3. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 4. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$. 5. $\frac{1}{2}$ 6. $\frac{\cos \alpha}{2}$.

11. Udhëzim: nisu prej anës së djathtë.

2.3.3

1. a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; g) $-\frac{1}{4}$ 2. $2 - \sin 5^\circ$ 3. $\sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha)$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 25^\circ \cos 35^\circ}$ 5. $-\frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{5\pi}{4}}$
 6. saktë. 7. saktë. 8. saktë. 10. Udhëzim: Shfrytëzo $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$. 11. a) $\frac{1}{2}(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ)$; b) $\frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{24} - \cos \frac{5\pi}{24})$.

2.4.1

1. b; c; e. 2. a) $k\pi$; b) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; c) $48^\circ 35' + k \cdot 360^\circ$; $131^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 3. a) $2k\pi$; b) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$; c) $\pm 143^\circ 8' + k \cdot 360^\circ$ 4. a) $\frac{\pi}{3} + k\pi$; b) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; c) $52^\circ 26' + k \cdot 180^\circ$ ose në radianë:
 $0,915 + k\pi$ 5. a) $\frac{\pi}{3} + k\pi$; b) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; c) $18^\circ 26' + k \cdot 180^\circ$ 6. $-15^\circ + k \cdot 360^\circ$; $-165^\circ + k \cdot 360^\circ$
 7. $\pm \frac{\pi}{18} + 2k\pi$ 8. $\frac{\pi}{7} + k\pi$ 9. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

2.4.2

1. a) $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi]$; b) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ c) $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 2. a) $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$; b) $70^\circ + k \cdot 180^\circ$;
 c) $[90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \cdot 360^\circ]$ 3. a) $\pi + 3k\pi$; b) $-220^\circ + k \cdot 720^\circ$; c) $\pm \frac{5\pi}{12} + k\pi$
 4. $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, 0,7288 + 2k\pi, 2,4127 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 5. $[\frac{\pi}{2} + k\pi, (2k+1)\pi]$ 6. $[k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi]$
 7. $[\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}]$ 8. $[(2k+1) \cdot 180^\circ, \pm 109^\circ 30' + k \cdot 360^\circ]$ 9. $[45^\circ + k \cdot 180^\circ, 76^\circ + k \cdot 180^\circ]$ 10. $[k \cdot 180^\circ, \approx 95^\circ + k \cdot 180^\circ]$
 11. $[k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi]$ 12. $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi]$ 13. $[\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k\pi]$ 14. $[k\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}]$
 15. $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2.5.1.

1. $\gamma = 75^\circ, b = 2\sqrt{3}, c = 3 + \sqrt{3}$; 2. $\gamma = 5^\circ, \alpha = 105^\circ, a = 3 + \sqrt{3}$; 3. $\beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ, \alpha = 75^\circ, a = (1 + \sqrt{3}) \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 4. $\gamma = 75^\circ, a = 43, b = 6\sqrt{2}, c = 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$; 5. $P = 46, S = 60\sqrt{3}$

2.5.2.

1. $b = 7$; 2. $a = 7, b = 13$; 3. $a = 13, b = 15$; 4. 7; 5. Udhëzim: Ai është këndi përballë
 brinjës me gjatësi 7. 6. $c = 12, d = 8$; 7. $\alpha \approx 58^\circ, \beta \approx 46^\circ 34'$;

2.5.3

2. 51,80 (fig.2) 3. 84,58m 4. 14,15km/h 5. 84,58m (fig.3) 6. (fig.4) $P = 132\text{N}$ Udhëzim: $F = Q \sin \alpha$

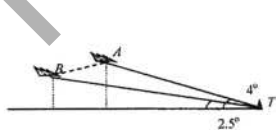


fig.1

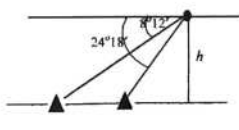


fig.2

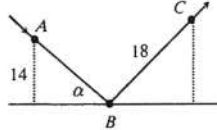


fig.3

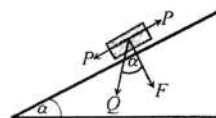


fig.4

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM (2)

1. $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\operatorname{tg} 75^\circ = 2+\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 75^\circ = 2-\sqrt{3}$ 2. $\alpha = \frac{5\pi}{12}$
 3. $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}+1$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, 1, 0 5. $-\frac{1}{2}$, $\frac{10}{3}$ 6. -1 7. $-\frac{1}{4}$
 8. 2 9. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ 10*. $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 11*. $4 \sin x \cdot \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}) \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$ 12. $\sin 10^\circ$ 13. **Udhëzim:** Vëndo $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
Zgjidhje: $\sqrt{2} \operatorname{tg} x \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 27. $x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$; $x_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ 28. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 29. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 30. $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 31. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 32* **Udhëzim.** Shfrytëzoji formulat: $\cos x + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ dhe $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Zgjidhje. $x_1 = k\pi$, $x_2 = (2k+1)\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

33. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

34. (fig.1)

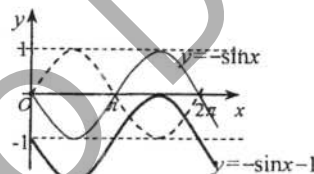


fig.1

35. (fig.2). **Mënyra I:**

amplituda: $3 \Rightarrow$

$-3 \leq y \leq 3$; perioda:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi; \text{ zhvendosje: } -\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3\pi}{8} \Rightarrow \text{majtas për } \frac{3\pi}{8}$$

Mënyra II. Vlerat karakteristike të funksionit (në intervalin themelor):

zerot: $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = 0, \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = \pi, \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow$

$x_1 = -\frac{3\pi}{8}, x_2 = \frac{9\pi}{8}, x_3 = \frac{21\pi}{8}$; maksimumi: $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x_{\max} = \frac{3\pi}{8}$; minimumi: $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_{\min} = \frac{15\pi}{8}$

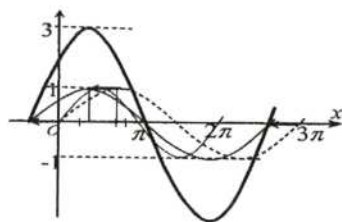


fig.2

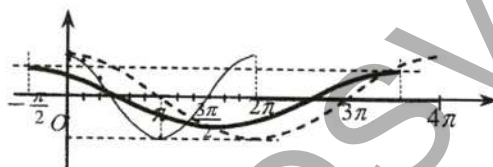


fig. 3

36. **Zgjidhje** (fig. 3). perioda: $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; amplituda: $a = \frac{3}{4}$; zhvendosje:

$-\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{2}$; zerot: $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{5\pi}{2}$; max në: $x = -\frac{\pi}{2}$ dhe $x = \frac{7\pi}{2}$; min në $x = \frac{3\pi}{2}$;

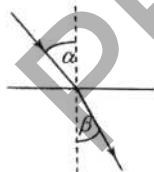


fig. 4

37. $\gamma = 64^\circ 28'$, $a = 78,576$, $b = 134,38$ 38. $\beta = 115^\circ 42' 46''$; $\gamma = 15^\circ 1' 50''$; $a = 399,94$

39. $\alpha = 114^\circ 45' 56''$; $\beta = 35^\circ 19' 36''$; $\gamma = 29^\circ 54' 28''$

41. **Udhëzim:** $\sin \alpha = n \sin \beta$, ku n është indeksi i refleksionit (fig. 4). **Zgjidhje:** $b = 40^\circ 30' 20''$ 42. $r=2,7$; $R=7,5$.

43. $S \approx 45$ 44. $d_1 = 7$, $d_2 = 105\sqrt{3}$

TEMA 3

3.1.1.

1. a) 1^0 . Për $n = 1$ gjykimi është i saktë, pasi $1 = 1^2 = 1$.

2^0 . Të supozojmë saktësinë për $n = k$, d.m.th. le të vlejë: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$

Tani që të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$, në anën e majtë dhe të djathtë prej barasisë së fundit shtojmë $2k + 1$, ku fitojmë:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1, \text{ prej ku kemi:}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2, \text{ që duhet të vërtetohet.}$$

9. a) 1^0 . Për $n = 1$ gjykimi është i saktë, pasi $6^2 - 1 = 35$, kurse numri 35 është gjithqysh i plotëpjesëtueshëm me vetveten.

2^0 . Të supozojmë saktësinë për $n = k$, d.m.th. le të vlejë: $35 \mid 6^{2k} - 1$, domethënë $6^{2k} - 1 = 35a$, ($a \in \mathbb{N}$).

Tani të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$, poashtu kemi:

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 35 \cdot 6^{2k} + (6^{2k} - 1) = 35 \cdot 6^{2k} + 35a = 35(6^{2k} + a), \text{ domethënë } 35 \mid 6^{2(k+1)} - 1.$$

d) 1^0 . Për $n = 1$ gjykimi është i saktë, pasi $6 \mid 1^3 - 1$.

2^0 . Të supozojmë saktësinë për $n = k$, d.m.th. le të vlejë: $6 \mid k^3 - k$, domethënë $k^3 - k = 6a$, ($a \in \mathbb{N}$).

Tani të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$, d.m.th. duhet të vërtetojmë se vlen: $6 \mid (k + 1)^3 - (k + 1)$.

Do të nisemi prej $(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = 6a + k + 3k^2 + 2k = 6a + 3k + 3k^2 = 6a + 3k(k + 1) = 6a + 3 \cdot 2b = 6a + 6 = 6(a + b)$, ku edhe $b \in \mathbb{N}$. Këtu është shfrytëzuar gjykimi se numri 2 është pjesëtues i prodhimit prej çfarëdo dy numrave natyrorë të njëpasnjëshëm (mund ta vërtetosh me induksionin matematikor). 10. a) 1^0 . Për $n = 1$ gjykimi është i saktë, pasi $2^1 = 2 > 1$.

2^0 . Të supozojmë saktësinë për $n = k$, d.m.th. le të vlejë: $2^k > k$. Tani të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$, përkatësisht: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k = k + k > k + 1$, domethënë kemi: $2^{k+1} > k + 1$. 11. a) jo, b) jo.

3.1.2.

2. $V_6^3 = 120$; 3. $V_4^2 - V_3^1 = 9$; 4. 480; 5. 156; 6. 600; 7. $n = 11$; 8. $k = 6$; 9. a) $V_6^4 - V_5^4 = 671$, b) 750; 10. $V_3^{13} = 1594337$.

3.1.3.

2. a) $4 \cdot 3! = 24$, b) $4! \cdot 24 = 576$; 3. $6! - 5! = 600$; 4. Prej $P_n : P_{n+2} = 0,1 : 3$, kemi: $n! : (n + 2)! = 0,1 : 3$, d.m.th. $3 \cdot n! = 0,1 \cdot (n + 2)(n + 1)n!$, prej ku $n^2 + 3n - 28 = 0$, $n = 4$; 5. Të tri kompletet e librave (sipas ngjyrës) mund t'i radhisish në $3! = 6$ mënyra. Kurse, mundesh edhe vetë librat në komplet t'i radhisësh (zhvendosësh) ndërmjet veti në $2!, 5!$, përkatësisht në $3!$ mënyra. Domethënë zgjidhja është $6 \cdot 2! \cdot 5! \cdot 3! = 8640$ mënyra; 6. Atë mund ta bësh në $P_{10}(3, 2, 5) = 2520$ mënyra; 7. $P_{10}(2, 2, 2, 2) = 226800$; 8. $P_7(3, 2, 2) = 210$; 9. Prej numrit të përgjithshëm të permutacioneve duhet t'i zbresësh permutacionet që fillojnë me 0, $P_6(3, 2) - P_5(2, 2) = 60 - 30 = 30$; 10. a) $P_8(4, 3) = 280$, b) $P_8(5, 2) = 168$, c) $P_8(5, 3) = 56$.

3.1.4.

2. $C_9^5 = 126$. 3. $C_{12}^2 - 12 = 66$. 4. 21. 5. $C_{10}^2 = 45$. 6. $C_8^2 - 2 \cdot 5 = 18$. 7. $C_{16}^1 \cdot C_{20}^3 + C_{16}^2 \cdot C_{20}^2 + C_{16}^3 \cdot C_{20}^1 + C_{16}^4 = 54060$. 8. $C_{39}^7 = 15\,380\,937$. 9. $\overline{C}_8^5 = 792$. 10. $\overline{C}_n^2 = n + 15$, $n = 6$.

3.1.5.

1. a) $2^{10} = 1024$, b) 0; 2. a) $243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$, b) $16x^4 - 160x^3 + 600x^2 - 1000x + 625$,
 c) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$, ç) $x^8 + 8x^7\sqrt{y} + 28x^6y + 56x^5y\sqrt{y} + 70x^4y^2 + 56x^3y^2\sqrt{y} + 28x^2y^3 + 8xy^3\sqrt{y} + y^4$;
 3. $\binom{7}{4}(\sqrt{x})^3(\sqrt{y})^4 = 35xy^2\sqrt{x}$; 4. $7392x^6$; 5. $T_5 = 1120x^4y^4$; 6. $29568x^6y^5$ dhe $14784x^5y^6$; 7. $T_7 = 28x^5$. 8. 84;
 9. I nënti; 10. $n = 11$.

3.2.2.

1. $\Omega = \{(s,s,s), (s,s,n), (s,n,s), (n,s,s), (s,n,n), (n,s,n), (n,n,s), (n,n,n)\}$, ngjarje të volitshme elementare për ngjarjen A janë $\{(s,s,n), (s,n,s), (n,s,s)\}$; 2. $\Omega = \{(s,1), (s,2), (s,3), (s,4), (s,5), (s,6)\}$; 3. $\Omega = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$, ngjarje të volitshme elementare për ngjarjen A janë $\{(1,3), (1,5), (3,1), (3,5), (5,1), (5,3)\}$;
 4. a) $\{(b_1, c_1, k), (b_2, c_1, k), (b_1, c_2, k), (b_2, c_2, k)\}$, b) $\{(b_1, c_1, c_2), (b_2, c_1, c_2), (c_1, c_2, k)\}$; 5. $A = \{(r,p,p), (p,r,p), (p,p,r)\}$, $B = \{(r,p,p), (p,r,p), (p,p,r), (r,r,p), (p,r,r), (r,p,r), (r,r,r)\}$, $C = \{(r,r,p), (p,r,r), (r,p,r)\}$, $D = \{(r,r,p), (p,r,r), (r,p,r), (r,r,r)\}$.
 6. $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,6\}$, $\bar{A} = \{2,4,6\}$, $\bar{B} = \{1,2,4,5\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup B = \{1,3,5,6\}$, $A \cap B = \{3\}$ dhe $\bar{A} \cap \bar{B} = \{2,4\}$. 7. $A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$, $B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$, $C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, $A \cap B = \{(2,6), (4,4), (6,2)\}$, $A \cap C = \{(2,2), (4,4), (6,6)\}$, $B \cap C = \{(4,4)\}$, $B \cup C = \{(1,1), (2,2), (2,6), (3,3), (3,5), (4,4), (5,3), (5,5), (6,2), (6,6)\}$, 8. $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{2,3,4\}$, $A \cap B = \{3,4\}$.

3.2.3.

1. $\frac{4}{10}$; 2. $\frac{3}{8}$; 3. $\frac{12}{100}$ (këtu nuk janë marrë parasysh fuqitë me bazë 4 dhe 8 pasi njëkohësisht janë fuqi me bazë 2, si edhe ato me bazë 9 të cilat njëkohësisht janë me bazë 3); 4. $\frac{1}{8}$; 5. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{2}{4}$, c) $\frac{1}{4}$; 6. $\frac{5}{36}$; 7. Numri i të gjitha mundësive është $n = \sqrt{6}^2 = 6^2 = 36$. Nëse me A e shënojmë ngjarjen vlera e të cilës kërkohet, atëherë $\bar{A}$ do të jetë ngjarja e kundërt (numri 6 të mos paraqitet asnjë herë). Ngjarje të volitshme për $\bar{A}$ janë variacionet me përsëritje prej elementeve 1,2,3,4,5 prej klasës së dytë, prandaj $P(\bar{A}) = \frac{25}{36}$, atëherë $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0,306$; 8. $P(A) = \frac{C_{13}^5}{C_{20}^5} = 0,083$. 9. Numri i të gjitha mundësive janë kombinime prej 10 elemente prej klasës së tretë, ndërsa ngjarje të volitshme do të jenë: të tërhequra janë tre topa të bardhë pse të zinj, numri i të cilëve është $C_6^3 + C_4^3$, prandaj gjasa e kërkuar do të jetë $P(A) = \frac{20+4}{120} = 0,2$; 10. Numri i të gjitha mundësive janë kombinacione prej 18 elemente të klasës së dytë, ndërsa ngjarje të volitshme janë: është tërhequr një top i bardhë dhe një i kuq, prandaj numri i ngjarjeve të volitshme do të jetë $C_3^1 \cdot C_7^1$, kurse gjasa e kërkuar $P(A) = \frac{21}{153} = 0,13725$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM 3.

1. a) Për $n = 1$ barasia është e saktë për $1 = 1(2-1)$. Të supozojmë saktësinë për $n = k$, d.m.th. le të vlejë: $1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) = k(2k-1)$. Tani duhet të vërtetojmë saktësinë për $n = k+1$, prandaj shtojmë $(4k+1)$ nga të dy anët e barasisë dhe fitojmë: $1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) + (4k+1) = k(2k-1) + (4k+1)$. Anën e djathtë mund ta transformojmë në këtë mënyrë: $k(2k-1) + (4k+1) = 2k^2 + 3k + 1 = (k+1)(2k+1) = (k+1)(2k+2-1) = (k+1)(2(k+1)-1)$, që duhet të vërtetohet. 2. a) Për $n = 1$ barasia është e saktë pasi $9 \mid 18$, prej supozimit se $9 \mid (7^k + 3k + 8)$, vijon se $7^k + 3k + 8 = 9a$, $a \in \mathbb{N}$. Duhet të vërtetojmë se: $9 \mid (7^{k+1} + 3(k+1) + 8)$, prandaj të nisemi prej $7^{k+1} + 3(k+1) + 8 = 7 \cdot 7^k + 3k + 3 + 8 = 7 \cdot (9a - 3k - 8) + 3k + 3 + 8 = 7 \cdot 9a - 21k - 56 + 3k + 11 = 7 \cdot 9a - 18k - 45 = 9 \cdot (7a - 2k - 5) \Rightarrow 9 \mid (7^{k+1} + 3(k+1) + 8)$, që duhet të vërtetohet. 3. a) Për $n = 1$ barasia është e saktë, pasi $3^1 \geq 2 + 1 = 3$. Të supozojmë saktësi për $n = k$, d.m.th. le të vlejë: $3^k \geq 2k + 1$. Duhet të vërtetojmë se jobarasia është e saktë edhe për $n = k+1$, d.m.th. se vlen: $3^{k+1} \geq 2(k+1) + 1$. Poashtu: $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3 \cdot (2k+1) = 6k+3 = 2k+2+1+4k = 2(k+1)+1+4k > 2(k+1)+1$, që duhet të vërtetohet. 4. -50. 5.a) 9; b) 11. 6. a) $\frac{n!}{(n+1)!-n!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot n! - n!} = \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n}$; b) $\frac{n+1}{n+2}$. 7.a) 30; b) 0; c) 375. 8.a) 7; b) 8. 9. 4, pasi $V_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1) \Leftrightarrow (x+1)x(x-1) + \frac{(x+1)!}{(x-1)!(x+1-(x-1))!} = 14(x+1) \Rightarrow 2x^2 - x - 28 = 0$, zgjidhjet e së cilës janë: $x_1 = -\frac{7}{4}$ dhe $x_2 = 4$, zgjidhja e parë bie (pse?). 10. 6, pasi $9V_x^3 = 5V_x^3 \Leftrightarrow 9x(x-1)(x-2) = 5x^3$, prej këtui fitojmë barazimin katror $4x^2 - 27x + 18 = 0$. Vetëm zgjidhja $x = 6$ e barazimit është zgjidhje e detyrës, (pse?). 11. $2 \cdot 3! = 12$. 12. a) 6!; b) 5! . 13. $V_3^{12} = 3^{12}$ ($n = 3$, përkatësisht 0 pikë për ndeshjen e humbur, 1 pikë për ndeshjen baraz dhe 2 pikë për ndeshjen e fituar). 14. 24, ato janë variacione pa përsëritje prej klasës së dytë (udhëtime ndërmjet dy stacioneve): $V_n^2 = 552 \Rightarrow n(n-1) = 552 \Rightarrow n^2 - n - 552 = 0 \Rightarrow n = 24$. 15. a) $C_9^2 = \binom{9}{2} = 36$ drejtëza, b) $C_9^3 = \binom{9}{3} = 84$ trekëndësha, c) $C_9^4 = \binom{9}{4} = 126$ tetraedra. 16. $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 2520$. 17. $32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$. 18. $-\left(\frac{10}{7}\right) 2^{13} x^8 \sqrt{2x}$. 19. $\binom{16}{8} x^{-4}$. 20. Çfarëdo anëtar në zbërthimin e binomit mund të shkruhet si: $\binom{9}{k} \cdot (\sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = \binom{9}{k} x^{\frac{9-k}{2}} x^{-\frac{k}{2}} = \binom{9}{k} x^{\frac{18-k}{2}}$, sipas kushtit të detyrës duhet $18-3k = 0$, domethënë $k = 6$. 21.a) $P(A) = \frac{1}{V_5^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$, b) $P(B) = \frac{1}{V_5^3} = \frac{1}{25}$, c) $P(C) = \frac{V_5^3}{V_5^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{12}{25}$. 22. $P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^2} = \frac{4 \cdot 4}{1326} = 0,012$. 23. Ngjarja e kundërtë $\bar{A}$ është ngjarja se menjëherë do të nxjerrish topa të kaltër, gjasa e së cilës është $P(\bar{A}) = \frac{C_7^2}{C_{24}^2} = \frac{21}{276} = \frac{7}{92}$; atëherë $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{92} = \frac{85}{92} = 0,9239$. 24. Prej 5 segmente 3 mund të zgjedhen C_5^3 mënyra. Trekëndësh mund të formohet vetëm me treshin (2,4,5), (4,5,7), (4,7,9) dhe (5,7,9) (pse?). Prandaj $P(A) = \frac{4}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{10} = 0,4$. 25. $P(A) = \frac{\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 0,61$. 26. 207, pasi $P(A) = 0,90$, $n = 230$, atëherë $\frac{m}{n} = 0,90$, prej ku $m = 0,90 \cdot 230 = 207$.

TEMA 4

4.1.1.

2. $\overline{M_2M_1} = 5$ 3. $M'(-4)$ 4. $\overline{OA} = (0,1)$, $\overline{OB} = (-2,-7)$, $\overline{OC} = (-4,5)$, $\overline{OD} = (-8,0)$ 5. $A(1,-2)$, $B(0,7)$ etj.
 7. a) $5\vec{i}$ dhe $-9\vec{j}$; b) $-7\vec{i}$ dhe $-0\cdot\vec{j}$; c) $0\vec{i}$ dhe $\frac{2}{3}\vec{j}$
 8. a) $\vec{a} = (-4,5)$ b) $\vec{b} = (1,1)$ c) $\vec{c} = (0,-5)$ 9. a) $B(-2,1)$ b) $B(0,2)$ c) $(0,2)$

4.1.2.

1. a) po; b) po. 2. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} + 11\vec{j}$ 3. a) $m = 8$, $n = 1$; b) $m = -1$, $n = 3$ 4. $\vec{c} = (9,-11)$, $\vec{d} = (7,5)$
 5. $\vec{a} = (-17,2)$ 6. a) $3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c} = -18\vec{i} - 23\vec{j}$; b) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 14\vec{i} - 11\vec{j}$ 7. $\alpha = -4$, $\beta = -3$
 8. $\vec{b} = 3\vec{a} = (12,-2)$

4.1.3.

1. a) 5; b) $\sqrt{34}$; c) 5. 2. 10; $3\sqrt{5}$; 13. 3. $B_1(13,2)$, $B_2(7,2)$. 4. $M(0,1)$. 5. Pikat janë kolineare.
 6. $(-3,5)$ dhe $(-6,5)$ ose $(-3,-1)$ dhe $(-6,-1)$. 7. $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \sqrt{197}$, $\overline{CD} = 2\sqrt{26}$, $\overline{AD} = \sqrt{149}$, $\overline{AC} = \sqrt{153}$, $\overline{BC} = 15$. 8. a) Paralelogram; tjerër nuk janë.

4.1.4.

1. $M(3; 5,5)$. 2. a) $C(3,2)$; b) $C(-1, -\frac{3}{2})$. 3. a) $M(3,3)$; b) $M(9,3)$. 4. $5, \frac{1}{2}\sqrt{37}, \frac{7}{2}$. 5. $(1, \frac{5}{4})$. 6. $D(9,6)$.
 7. $C(8,6)$, $D(4,2)$. 8. $T(\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$, $\overline{OT} = \frac{1}{3}\sqrt{113}$. 9. $(-2,0)$ dhe $(2,3)$; 5. 10. $B(-9,7)$, $C(-9,-7)$, $D(9,-7)$ dhe $d = 2\sqrt{130}$. 11. $A(-5,7)$, $B(1,-3)$, $C(3,1)$. 12. $T(-1,0)$, $C(0,2)$. 13. **Udhëzim:** bëje vizatimin, pra do të vëresh cilat janë paralele dhe do të fitosh $\overline{AB} = 5\sqrt{10}$, $\overline{CD} = \sqrt{10}$ etj.

4.2.1.

1. a) $y = x + 2$; b) $y = -\sqrt{3}x - 3$. 2. $k = \frac{3}{4}$. 3. a) $\alpha = 150^\circ$; b) $\alpha \approx 21^\circ 48'$; c) $\alpha = 0^\circ$; ç) $\alpha = 90^\circ$.
 4. Pikat A dhe B, ndërsa pika C nuk shtrihet. 5. $A(8,0)$, $B(0,6)$. 6. $k = 2$. 7. $k = 3$.
 8. **Udhëzim:** së pari zgjidhe sistemin e barazimeve $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$, ku pikëprerja është $M(1,1)$. Koeficienti i drejtimit është -2, pra drejtëza e kërkuar është $y = -2x + n$; por drejtëza kalon nëpër pikën $M(1,1)$, prandaj $1 = -2 \cdot 1 + n \Leftrightarrow n = 3$, atëherë $y = -2x + 3$ përkatësisht $2x + y - 3 = 0$.
 9. **Zgjidhje:** Barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(a,b)$ dhe është paralele me boshtin x është $y = b$, në rastin tonë $y = -5$, kurse paralele me boshtin y , $x = a$, domethënë $x = -4$.
 10. $5x - 3y + 17 = 0$. **Udhëzim:** le të jetë $M(x,y)$ pikë prej asaj bashkësie të pikave, atëherë $\overline{MA} = \overline{MO}$ etj.
 11. $3x - 2y - 7 = 0$. 12. $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = \arctg(-\frac{1}{6})$. 13. a) $\alpha \approx 63^\circ 26'$; b) $\alpha \approx 161^\circ 34'$; c) $\alpha \approx 120^\circ$

4.2.2

1. a) $x + y - 2 = 0$; b) $x - y + 8 = 0$; c) $y = \sqrt{3}x + (1 - 3\sqrt{3})$.
2. **Udhëzim:** barazimi i drejtëzës së kërkuar do të jetë $y - 2 = k(x - 2)$, pikëprerjet e së cilës me boshtet e koordinatave janë $A(\frac{2k-2}{k}, 0)$ dhe $B(0, 2-2k)$, syprina e trekëndëshit AOB (O-fillimi i koordinatave.) është $\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = 9$ etj. Drejtëza janë dy edhe ato: $x + 2y - 6 = 0$ dhe $2x + y - 6 = 0$.
3. $6x - 11y - 20 = 0$. 4. $y = 4x - 20$. 5. a) $x - y + 2 = 0$; b) $x + y - 1 = 0$; c) $2x - 3y - 2 = 0$.
6. a) AB: $5x - 2y - 4 = 0$, AC: $y + 11x - 25 = 0$, BC: $16x - y - 56 = 0$;
a) $2x + y - 7 = 0$, $7x - y - 20 = 0$, $x = 3$.
7. **Udhëzim:** së pari caktoje pikëprerjen e drejtëzave të dhëna, duke e zgjidhur sistemin: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$.
Zgjidhja e tij është çifti i radhitur $(4, -1)$. Pastaj arrijmë deri te barazimi i drejtëzës nëpër dy pika e cila është $x + y - 3 = 0$. 8. $A(-7, 0)$, $B(0, \frac{7}{3})$. 9. $5x - 2y - 17 = 0$. **Udhëzim:** së pari caktoj koordinatat e prerjes së diagonaleve të paralelogramit, kurse pastaj koordinatat e kulmit B. 10. $3x + 2y - 24 = 0$.
11. a) nuk shtrihen; b) shtrihen. 12. $p = 7$, $q = -2$.

4.2.3

1. a) $2x + 3y - 6 = 0$; b) $3x - 4y + 12 = 0$; c) $5x - 12y - 30 = 0$; ç) $3x - 2y + 6 = 0$. 2. a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$;
 $\frac{3}{3}$
- b) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{2} = 1$; c) $\frac{x}{\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{2}{5}} = 1$. 3. a) $k = -1$; b) $k = -2$; c) $k = \frac{1}{2}$. 4. a) $a = 2$; b) $a = -\frac{4}{3}$. 5. $\lambda = \frac{2}{5}$. 6. $a = \frac{4}{9}$.
7. $a = -\frac{4}{11}$. 8. $5x + 3y - 30 = 0$. 9. $x + y - 1 = 0$. 10. $\frac{x}{-8} + \frac{y}{9} = 1$; $\frac{x}{-8} + \frac{y}{-9} = 1$; $\frac{x}{8} + \frac{y}{-9} = 1$.
11. 6 katror njësi.

4.2.4

1. a) $M(1, 1)$; b) nuk kanë pika të përbashkëta pasi $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{-4}{-17}$, drejtëzat janë paralele; c) $M(1, 2)$.
2. $y + 2x - 3 = 0$. 3. $x + 23y - 18 = 0$, $49x + 7y - 82 = 0$. 4. $m_1 = -3$, $m_2 = 3$. 5. $m_1 = -4$, $m_2 = 4$.
6. $m = -\frac{23}{136}$. 7. 120° . 8. **Udhëzim:** koeficienti i drejtimit të drejtëzës së parë është $\frac{1}{2}$, kurse drejtëza e dytë formon kënd prej 90° me boshtin x , pra $\varphi = 90^\circ - \arctg \frac{1}{2} \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$. 9. 90° . 10. 90° .
11. $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\tau = 90^\circ$. 12. $7x + 3y - 11 = 0$.

4.2.5.

1. Janë paralele: b) dhe ç), normale janë: a) dhe c), b) dhe d), ç) dhe d). 2. $A=2, B=-1, C=5$ d.m.th. $2x - y + 5 = 0$.
 3. $6\frac{23}{65}, 6\frac{41}{65}$. 4. $m=0$. 5. $y = -\frac{1}{3}x$. 6. $8x - 5y + 1 = 0$. 7. $2x + y - 7 = 0$. 8. $(-1, 5)$ dhe $(4, 0)$.
 9. a) $m = -4, n \neq 2$ ose $m = 4, n \neq -2$; b) për $m = 0$ dhe n çfarëdo. 10. a) $2x + y - 4 = 0$; b) $6x - 5y + 4 = 0$.
 11. $2x + y + 20 = 0$ ose $x - 2y - 15 = 0$. 12. $M(1, 1)$.

4.2.6.

1. a) $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 5 = 0$; b) $x\sqrt{3} + y - 24 = 0$; c) $x\sqrt{3} - y - 20 = 0$. 2. a) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0$;
 b) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; c) $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$. 3. Udhëzim: shikoje zgjidhjen e shembullit 4. Jo. 4. a)
 $\frac{2x-3}{2} = 0$ ose $x - \frac{3}{2} = 0$; b) $\frac{4y+5}{-4} = 0$ ose $y - \frac{5}{4} = 0$. 5. a) $\frac{3x}{\sqrt{34}} + \frac{5y}{\sqrt{34}} - \frac{15}{\sqrt{34}} = 0$;
 b) $\frac{-7x}{\sqrt{65}} + \frac{4y}{\sqrt{65}} - \frac{28}{\sqrt{65}} = 0$; c) $\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} + \frac{12}{5} = 0$. 6. a) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y = 0$; b) $\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y = 0$. 7. a) 1; b) 11.

4.2.7.

1. a) 2; b) 3; c) 5. 2. a) $d = 3$. 3. $N_1(3, 5), N_2(-37, 45)$. 4. $4x - 3y - 26 = 0$ ose $3x + 4y - 32 = 0$.
 5. a) $\frac{198}{\sqrt{97}}, \frac{99}{\sqrt{13}}, \frac{22}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{28}{5}, \frac{28}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{2}}$. 6. $3x + 4y + 12 = 0$. 7. $7x - 3y + 15 = 0$ dhe $3x + 7y - 93 = 0$.
 8. Udhëzim: caktoj largësitë prej pikave deri te drejtëza, pa vlerë absolute. Nëse janë me shenja të ndryshme shtrihen në gjysmërrafshe të ndryshme, përkundrazi në gjysmërrafshin e njëjtë. Në rastin tonë pikat janë në gjysmërrafshe të ndryshme.
 9. $77x + 99y + 3 = 0$ dhe $9x - 7y - 79 = 0$. 10. $m = 24$ dhe $a = -146$. 11. $S = 6$ katror njësi.
 12. Udhëzim: përkujtohu se qendra e vijës rrethore të brendashkruar në trekëndësh është pikëprerja e simetraleve të këndeve. Në rastin tonë qendra është $O(-1, \frac{1}{3})$ dhe $r = \frac{11\sqrt{5}}{15}$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM (4.1 DHE 4.2)

1. Në kuadrantin e parë dhe të dytë janë edhe simetrik në lidhje me boshtin y . 2. $A'(4, 2)$. 3. $M'(2, 3)$.
 4. Pika është $B'(-2, -5)$. 5. a) $M'(6, 5)$; b) $M'(-6, -5)$. 6. $\vec{OM} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $|\vec{OM}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$.
 7. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $|\vec{AB}| = 5$. 8. $(\vec{a} + \vec{b})(5, 6), (\vec{a} - \vec{b})(1, -2)$, domethënë $(5, 6)$ dhe $(1, -2)$. 10. $\vec{x}(12, -1)$. 11. $(6, -1)$.
 12. $\vec{a}, \vec{b}$ dhe $\vec{e}$. 14. a) 13; b) 5; c) 10. 15. $M(0, -\frac{25}{4})$. 16. $M(2, 5; 2, 5)$. 17. $S = 34$ k.nj. 18. $O(3, -2)$,
 $R = 10$. 19. Kënddrejtë. 20. $M(6, \frac{27}{4})$. 21. a) $M(13\frac{4}{5}, -6)$. 22. $T(2, 1)$. 23. $D(2, 1)$. 24. $N(-2, 0)$,
 $N_1(2, 3)$. 25. 15, 10, $5\sqrt{13}$. 26. 2a. 28. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$, b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 8$, c) $y = -\sqrt{3}x - 5$.

29. a) $y - 5 = 0$, b) $y + 3 = 0$. 30. a) $k = 3, n = -5$; b) $k = 2, n = \frac{1}{7}$; c) $k = \frac{1}{2}, n = -3$. 31. a) $y = 2x + 12$; b) $y = 7x - 7$. 32. a) $x - 8 = 0$; b) $x + 4 = 0$. 33. $m = -\frac{1}{2}$. 34. $m = 3$ 35. a) $m = n = -4$; b) $m = -\frac{1}{2}$. 36. $x + 3y - 2 = 0$. 37. $y + 4x - 26 = 0$. 38. $3y - 2x - 9 = 0$. 39. $m_1 = 1, m_2 = \frac{59}{49}$. 40. a) $P = \sqrt{13} + \sqrt{53} + 4\sqrt{2}$; b) $5, \frac{\sqrt{157}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2}$. 41. $4x - y + 5 = 0, x + y + 5 = 0, y + 3 = 0, O(-2, -3)$. 42. a) $\operatorname{tg} \alpha = -7, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \tau = 2$; b) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \tau = \frac{\pi}{2}$. 43. $m = \frac{5}{2}, m = -10$. 44. $m = -1, n = \frac{1}{3}$. 45. **Udhëzim:** së pari caktoji barazimet e drejtëzave të cilat i përmbajnë brinjët e trekëndëshit, ato janë: $y = \frac{6}{5}x, y = -\frac{4}{9}x + \frac{38}{9}$ dhe $y = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$, kurse pastaj largësia prej çdo kulmi deri te brinja e përballtë. 46. $x - 3y + 9 = 0$ 47. $8y - 15x - 156 = 0, 4y - 3x - 60 = 0$. 48. $M'(-1, 0)$. 49. **Udhëzim:** Pika në të cilën reflektohet rrezja prej boshtit x është prerja e drejtëzës së dhënë, d.m.th. $M(6, 0)$. Barazimi i drejtëzës sipas të cilës reflektohet rrezja është $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$. 50. **Udhëzim:** a) drejtëzën e kërkuar shkruaje në formën eksplicite $l: y = kx + n$, pra pasi janë paralele vijon $k_p = k_l = 2$ etj. a) $2x - y - 2 = 0$ dhe $2x - y - 12 = 0$; b) $2x + y + 4 = 0$ dhe $2x + y - 6 = 0$. 51. $4x - 5y - 20 = 0, 3y + 10 = 0$. 52. **Udhëzim:** le të jetë $M(x, y)$ pikë prej v.g.j.p., atëherë $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow x - y = 0$. 53. $14x + 112y - 455 = 0$ dhe $64x - 8 - 195 = 0$. 54. **Udhëzim:** shkruaji barazimet e të dy simetraleve. Pastaj merr çfarëdo pikë prej njërës drejtëz dhe cakto largësinë deri te të dy simetralet (bëje skicën). Lehtë do të vëresh se cila është simetralja e këndit të ngushtë, kurse ajo është $x + y - 3 = 0$. 55. $3x - 4y + 24 = 0, 5x - 12y + 16 = 0$.

4.3.1.

1.a) Pika; b), c), ç) dhe d) vija rrethore. 2. a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; ç) $x^2 + y^2 = 4$; d) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 4$ të njëjta edhe të tjerat. 3. $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 44 = 0$ 4. a) $p = 5, q = -6, r = 12$; b); $p = 7, q = 0, r = 3$, c) $p = \frac{1}{2}, q = 1, r = 2$; ç) $p = 0, q = 3, r = 4$. 5. a) $(x-2)^2 + y^2 = 4$; b) $x^2 + (y+3)^2 = 16$; ç) $(x-\frac{9}{4})^2 + (y+\frac{10}{3})^2 = \frac{49}{4}$. 6. $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$. 7. **Udhëzim:** bëje vizatimin dhe do të vëresh se $p=r$. Përgjigje: $k_1 = 10, k_2 = -2$. 8. **Udhëzim:** shikoje zgjidhjen e shembullit 4. Përgjigje: $k_1 = 4, k_2 = 0$. 9. **Zgjidhje.** Qendra $S(p, p)$, dhe $r=p$ d.m.th. $p=q=r$, pra barazimi i vijës rrethore do të jetë $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Por drejtëza $3x + 4y - 5 = 0$ prej qendrës S është e larguar për r d.m.th. $r = \frac{|3r + 4r - 5|}{5} \Rightarrow 5r = \pm(7r - 5)$, prej ku $r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = \frac{5}{12}$. Barazimet e vijave rrethore janë: $(x-\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$ dhe $(x-\frac{5}{12})^2 + (y-\frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$ (këtë lloj të detyrave, më vonë do t'i zgjidhish edhe në tjetër mënyrë). 10. **Udhëzim:** shfrytëzoje zgjidhjen e detyrës paraprake, se largësitë r prej qendrës $S(p, q)$ të vijës rrethore deri te çdonjëra prej tri drejtëzave të barabartë ndërmjet veti. **Përgjigje:** $(x+\frac{17}{6})^2 + (y+\frac{19}{6})^2 = \frac{5}{4}$, $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

11. Udhëzim: përkujtohu në zgjidhjen e sistemit të barazimeve me dy të panjohura, prej të cilave njëri është linear, kurse tjetri katror. Përgjigje: $M_1(1,2)$ dhe $M_2\left(\frac{56}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ **12. Udhëzim:** Shqyrtoji zgjidhjet, varësisht prej diskriminantës së barazimit katror që fitohet.

4.3.2.

1. a) $M_1(0,2)$ dhe $M_2(2,6)$; b) Drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta. 2. $M_1(-2,0), M_2\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.
 3. $K: (x - \frac{3}{2})^2 + (y - 8)^2 = \frac{25}{4}$. **4. Udhëzim:** qendra S ka koordinata të barabarta të cilat janë të barabarta edhe në rrezen, d.m.th. $S(r,r)$, pra atëherë është $r = \frac{|3r + 4r - 5|}{5} \Leftrightarrow 5r = \pm(7r - 5)$ etj. $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$ dhe $(x - \frac{5}{12})^2 + (y - \frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$. **5. Udhëzim:** Qendra në këtë rast i ka koordinatat $|p| = r, q = 0$, pastaj shfrytëzoje zgjidhjen e detyrës paraprake. Përgjigje: $(x - \frac{13}{4})^2 + y^2 = \frac{169}{16}$ dhe $(x - \frac{13}{9})^2 + y^2 = \frac{169}{81}$.
 5. $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ dhe $(x - \frac{11}{6})^2 + (y + \frac{23}{6})^2 = \frac{5}{4}$. 7. $(x - \frac{5}{14})^2 + (y - \frac{23}{14})^2 = \frac{1}{4}$ dhe $(x - \frac{10}{23})^2 + (y - \frac{136}{63})^2 = \frac{196}{3969}$. 8. $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$. 9. a) $m = 9$ dhe $m = 11$; b) $m \in (-9, 11)$;
 c) $m \in (-\infty, -9) \cup (11, +\infty)$. 10. $a = \pm\sqrt{5}$. 11. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{36}{25}$.

4.3.3.

1. a) $2x + y - 7 = 0$; b) **Udhëzim:** $T \in K$, atëherë ordinatën e T e gjen prej barazimit $(-2 - 1)^2 + (y - 2)^2 - 10 = 0$, d.m.th. $y^2 - 4y + 3 = 0$, prej ku $y_1 = 2, y_2 = 3$, pra $T(-2, 3)$, $3x - y + 9 = 0$; c) $2x - y - 5 = 0$. 2. a) $2x + y - 5 = 0$; b) $3x - y + 10 = 0$; c) $2x - y - 10 = 0$;
 ç) $x - y + 6 = 0$. 3. $x + 2y - 18 = 0$. 4. $A(1, 11), B(-4, 4), C(5, -1)$. 5. $\varphi = 45^\circ$.
 6. $t_1: 3x + 2y - 6 = 0, t_2: 3x - 2y - 60 = 0$. 7. $2x + y - 5 = 0$ dhe $2x + y + 5 = 0$.

4.3.4.

- 1. Udhëzim:** prej elementeve të dhëna fiton $a = 15, c = 9$, kurse prej gjysmëboshtit të vogël $b^2 = a^2 - c^2 = 225 - 81 = 144$. Përgjigje: $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$. 2. **Udhëzim:** shikoje shembullin e zgjidhur 3, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. 3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 4. **Udhëzim:** shikoje shembullin e zgjidhur 6. Përgjigje: $\frac{9x^2}{145} + \frac{y^2}{16} = 1$.
 5. a) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 6. a) **Zgjidhje:** pasi pikave $M(2, 1)$ dhe $N(1, 2)$ koordinatat e kënaqin barazimin e elipsës $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ d.m.th. $4b^2 + 0 \cdot a^2 = a^2b^2 \Rightarrow a^2 = 4$ dhe $1 \cdot b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \Rightarrow b^2 = 16$, pra $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 7. $\epsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}, 2p = \frac{8}{3}$. 8. **Udhëzim:** së

pari formo barazim të elipsës sipas elementeve të dhëna e cila është $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$. $A_1(-15,0)$, $A_2(15,0)$,

$B_1(0,12)$, $B_2(0,-12)$, $F_1(-9,0)$ dhe $F_2(9,0)$. **9. Udhëzim:** Nëse është dhënë pika $M(x_1, y_1)$ dhe elipsa $E: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, atëherë $b^2x_1^2 + a^2y_1^2$ mund të jetë më e madhe, e barabartë ose më e vogël se zero, pra pika M është jashtë, shtrihet në elipsë, është pikë e brendshme e elipsës. Përgjigje: a) $M \in E$; b) ajo është pikë e jashtme; c) pikë e brendshme. **10.** $R=24 \text{ m}^2$. **11. Udhëzim:** nëse boshti i vogël prej fokusëve shikohet nën këndin e drejtë, atëherë $b=c$. Me zgjidhjen e sistemit $\begin{cases} a=\sqrt{6} \\ \sqrt{a^2-b^2}=b \end{cases}$, fitohet $a^2=6$ dhe $b^2=3$, pra $E: 3x^2+6y^2=18$.

12. (a,b), (-a,b), (-a,-b), (a,-b), bëje vizatimin. **13.** $M_1(0,-6)$, $M_2(5,4;8)$.

4.3.5.

1.a) $M_1(\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ dhe $M_2(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3})$; b) $M(3,0)$ - pika prekëse; c) $l \cap E = \emptyset$. **2. a)** $l \cap E = \{M\}$ dhe $M(3,3)$;

b) $l \cap E = \{M_1, M_2\}$, ku $M_1(0,-6)$, $M_2(5,4;8)$. **3.a)** $|n| < 5\sqrt{2}$; b) $|n| = 5\sqrt{2}$; c) $|n| > 5\sqrt{2}$.

4. $k = \pm 1$. **5. a)** $x^2 + 25y^2 = 25$; b) $3x^2 + 16y^2 = 48$. **6.** $8x^2 + 17y^2 = 136$. **7.** $a=10, b=5, D(8,3)$.

8. a) $y=5, x+4y-25=0$; b) $x-4y+4=0, x+2y+4=0$. **9.** $25x^2 + 225y^2 = 5625$.

10. Udhëzim: prej barazimit të drejtëzës, $k = -\frac{3}{2}$, kurse prej barazimit të elipsës kemi $a^2=10, b^2=\frac{5}{2}$. Prej

kushtit për prekje të drejtëzës dhe elipsës fitojmë $n = \pm 5$, atëherë tangjentat janë $y = -\frac{3}{2}x \pm 5$.

11. Udhëzim: vepro si në detyrën paraprake $y = -\frac{1}{2}x \pm 2\sqrt{10}$.

4.3.6.

1. a) $3x+4y-24=0$; b) $9x-20y-75=0$; c) $16x-15y+100=0$. **2. a)** $t: x+y-5=0, n: x-y-3=0$;
b) $t: 3x-10y+25=0, n: 50x+15y+126=0$ c) $t: x+2y-8=0, n: 2x-y-1=0$.

3. Udhëzim: barazimi i normales në pikën $T(x_1, y_1)$ është $y-y_1 = \frac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$. Ajo duhet të kalojë nëpër

fokusin $F(1,0)$, atëherë fitohet $0-y_1 = \frac{4y_1}{3x_1}(1-x_1)$, prej ku $y_1=0$, që do të thotë se normalja kalon nëpër

kulmin e elipsës e cila shtrihet në boshtin x . **4.** $k = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **5.** $n = \pm \frac{1}{2}$ **6.** Po, normalja është **7.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{45} = 1$.

8. a) $4x^2 + 25y^2 = 100$; b) $4x^2 + 225y^2 = 500$. **9. a)** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1$; b) $16x^2 + 25y^2 = 400$.

10. $M(-10,15)$.

4.3.7.

1. a) $4x^2 - 9y^2 = 144$; b) $16x^2 - 9y^2 = 144$; c) **Udhëzim:** shfrytëzoje se $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ d.m.th.

$$\frac{\sqrt{64 + b^2}}{8} = \frac{5}{4}, \text{ prej ku } b^2 = 36. \quad H: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \quad 2. \text{ a) } a = 3, b = 4, F_1(-5, 0), F_2(5, 0), y = \pm \frac{4}{3}x;$$

- b) $a = 4, b = 1, F_1(-\sqrt{17}, 0), F_2(\sqrt{17}, 0), y = \pm \frac{1}{4}x$. **3. Udhëzim:** Zgjidhe sistemin $\begin{cases} 36a^2 - b^2 = a^2b^2 \\ 64a^2 - 8b^2 = a^2b^2 \end{cases}$ sipas të

panjohurave a^2 dhe b^2 . $H: 32x^2 - 4y^2 = 148$. 4. a) **Zgjidhje:** Nëse pika M prej bashkësisë është ndërmjet të dy degëve të hiperbolës, lehtë arrihet deri te përfundimi se është $\overline{MF_1} - \overline{MF_2} < 2a$, prej ku vijon se $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 < 0$ d.m.th. $b^2x^2 - a^2y^2 < a^2b^2$; b) Nëse M është në njërin prej degëve të hiperbollës, atëherë $\overline{MF_1} - \overline{MF_2} > 2a$, prej ku vijon se $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 > 0$, d.m.th. $b^2x^2 - a^2y^2 > a^2b^2$.

5. **Zgjidhje:** Barazimi i hiperbolës H fokusët e së cilës janë në boshtin y është $H: \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ose

$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, ku b është gjysmëboshti real, kurse a gjysmëboshti imagjinar. Formoji barazimet

$$c = 50, b = 32 \text{ dhe } a^2 = c^2 - b^2 = 1476, \text{ domethënë } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{1476} = 1. \quad 6. \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ ose } x^2 - y^2 = 4.$$

7. **Udhëzim:** shikoje zgjidhjen e detyrës 4. a) të hiperbolës; b) në hiperbolë; dhe c) jashta hiperbolës.

8. **Udhëzim:** pasi $y = \pm \frac{b}{a}x$ është asimptotë, atëherë $\frac{b}{a} = \tan 60^\circ$ etj. a) $x^2 - 3y^2 = 9$; b) $3x^2 - y^2 = 36$.

9. **Udhëzim:** së pari caktoji fokusët e elipsës $F_1(-4, 0)$ dhe $F_2(4, 0)$, atëherë fokusët e hiperbolës janë $F_1'(-4, 0)$ dhe $F_2'(4, 0)$ etj. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. 10. a) $9x^2 - 16y^2 = 144$; b) $25x^2 - 144y^2 = 3600$. 11. a) $M_1(-9, 0)$, $M_2(-15, -8)$; b) $M_1(6, 2)$, $M_2(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3})$.

4.3.8.

1. a) Nuk kanë pika të përbashkëta; b) Nuk kanë pika të përbashkëta; c) Priten; ç) Drejtëza është tangjentë.
2. a) T(5, -2); b) T(2, 3); c) T(4, 3); ç) T(10, 3). 3. a) $M_1(-2, 0)$ dhe $M_2(-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3})$; b) $M_1(-\frac{25}{3}, 4)$, $M_2(-13, \frac{36}{5})$.
4. a) $|m| > \frac{9}{2}$; b) $|m| = \frac{9}{2}$; c) $|m| < \frac{9}{2}$. 5. $t_1: x - y - 1 = 0, t_2: 9x + 5y - 23 = 0$. 6. $t: 3x - 2y \pm 4 = 0$.
7. $t: 2x - y \pm 1 = 0$. 8. $8x^2 - 9y^2 = 72$. 9. $m = 4$. 10. $m = 2$.

4.3.9.

1. a) $t: x + y - 1 = 0$; b) $t: 7x + 4y - 1 = 0$; c) $t: x + y + 1 = 0$. 2. **Udhëzim:** caktoji pikëprerjet (shikoje shembullin e zgjidhur 3). $t_1: x - y - 2 = 0, t_2: x - y + 2 = 0$. 3. $t: 15x + 8y + 54 = 0$.
4. **Udhëzim:** pasi $T \in l$, cakto ordinatën e pikës T. $H: 4x^2 - 16y^2 = 64$.
5. $t: 5x - 6y - 32 = 0, n: 6x + 5y - 75 = 0$. 6. $n: 4x + 9y - 48 = 0$. 7. P(8, -5). 8. $x^2 - 4y^2 = 4$.
9. $\sqrt{3}x - y \pm \sqrt{15} = 0$; $D_1(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{15}}{5})$ dhe $D_2(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{15}}{5})$.

4.3.10.

1. a) $y^2 = 6x$; b) $y^2 = 16x$. 2. **Udhëzim:** prej parabolës $P: y^2 = 8x$, fitojmë se $\frac{p}{2} = 2$ dhe $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} = 10$, atëherë $x_1 = 8$, kurse $x_2 = -12$ nuk merret parasysh (pse?), kurse për $y = \pm 8$, pra $M_1(8,8)$ dhe $M_2(8,-8)$. 3. a) $p = \frac{1}{5}, F(\frac{1}{10}, 0)$; b); c) $p = \frac{1}{4}, F(\frac{1}{8}, 0)$; ç) $p = \frac{9}{2}, F(\frac{9}{4}, 0)$. 4. a) $y^2 = 16x$; b) $y^2 = -20x$; c) $y^2 = 3x$. 5. a) $p = 2, F(1,0)$ $y^2 = 20x$; b) $y^2 = \frac{28}{3}x$; c) $y^2 = -10x$; ç) $y^2 = -7x$. 6. a) $y^2 = \frac{25}{3}x$; b) $y^2 = -\frac{16}{3}x$; c) $y^2 = \frac{27}{7}x$. 7.a) M_1 shtrihet pasi është $6^2 = 9 \cdot 4$. b) M_2 nuk shtrihet, pasi është $5^2 < 9 \cdot 4$. c) M_3 nuk shtrihet pasi $7^2 > 9 \cdot 4$. 8. $M(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. 9. **Udhëzim:** caktoji së pari fokusët e elipsës F_1, F_2 . Detyra ka dy zgjidhje për parabolat $y^2 = 16x$ dhe $y^2 = -16x$. 10. $y^2 = 12x$ dhe $y^2 = -12$. 11. $M_1(\frac{3}{2}, -3)$ dhe $M_2(2\frac{2}{3}, 4)$.

4.3.11.

1. a) priten, $M_1(\frac{3}{2}, -3)$, $M_2(2\frac{2}{3}, 4)$; b) preken $T(\frac{5}{2}, -5)$; c) nuk kanë pikë të përbashkët. 2. a) $\overline{M_1M_2} = \frac{5}{6}\sqrt{5}$. **Udhëzim:** caktoji pikëprerjet e drejtëzës dhe parabolës, kurse pastaj cakto largësinë ndërmjet dy pikave. b) $\overline{M_1M_2} = 2\sqrt{13}$. 3. $MM_1: 4x - 5y + 12 = 0$. 4. a) tangjenta është, me pikën prekëse (1,4); b) tangjenta është, me pikën prekëse (8,-4). 5. a) $t: 3x + 2y + 3 = 0$; b) $3x - 4y + 3 = 0$. 6. $t: x - y + 1 = 0$. 7. a) $m = -2$; b) $m = 1$; c) $m = 2$. 8. **Udhëzim:** drejtëzën l merrenë formën eksplicite $l: y = kx + n$, por $P \in l$, pra $8 = 6k + n$, kurse pastaj shfrytëzoje kushtin për prekje të drejtëzës dhe parabolës. $t_1: x - y + 2 = 0$ i $t_2: x - 3y + 18 = 0$. 9. $y^2 = 85\frac{1}{3}x$. 10. **Udhëzim:** shkruaji barazimet e të dy tangjentave prej pikës P të parabolës P, kurse pastaj caktoje këndin ndërmjet tyre. a) $\varphi = 90^\circ$; b) $\varphi = 45^\circ$. 11. $t_1: 3x + y + 1 = 0$; $t_2: x - 3y + 27 = 0$.

4.3.12.

1. **Udhëzim:** prej barazimit të parabolës cakto ordinatën y_1 . a) $t: 4x - 4y + 7 = 0$; b) $t: 4x - 2y + 5 = 0$; c) $t: 3x + 2y + 4 = 0$; ç) $5x + 4y + 10 = 0$. 2.a) $T(\frac{8}{7}, -2)$; b) $T(20, -10)$; c) $T(4, -2)$; g) $T(\frac{3}{4}, 3)$. 3. a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 120^\circ$. 4. $M(\frac{11}{12}, -\frac{11\sqrt{3}}{6})$. 5. a) $n: 4x + 7 - 18 = 0$; b) $4x + y - 9 = 0$; c) $2x - 2y - 15 = 0$. 6. $P(-6, 1)$. 7. **Udhëzim:** shikoje shembullin e zgjidhur 4. $t_1: x + y + 2 = 0$ dhe $t_2: x - y + 2 = 0$. 8. $t_1: x + 3y + 15 = 0$ dhe $t_2: x - 3y + 15 = 0$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM 4.3

1. a) nuk shtrihet; b) shtrihet; c) shtrihet; ç) nuk shtrihet. 2. a) $K: x^2 + y^2 = 9$;
 b) $K: x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$; c) $K: 16x^2 + 16y^2 - 32x + 16y + 11 = 0$; ç) $K: x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$.
 3. $K_1: x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x + 4y = 0$ dhe $K_2: x^2 + y^2 - 8\sqrt{2}x + 4y = 0$. 4. **Udhëzim:** Provo pikat a janë kolineare (shtrihen në drejtëzën e njëjtë), në këtë rast nuk është përcaktuar vija rrethore.
 a) $K: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 31 = 0$; b) $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. 5. a) $r = 10, p = 0, q = 2$; b) $r = 2, p = 1, q = -1$; ç) $r = 2, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{3}$. 6. $K: x^2 + y^2 - 16x - 4y + 52 = 0$. 7. $K: (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$.
 8. $K: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$. 9. $K: (x+4)^2 + (y+2)^2 = 16$. 10. $K: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 29$.
 11. $K_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. 12. $l_1: 2x - y - 6 = 0$. 13. **Udhëzim:** caktoje largësinë qendrore $\overline{S_1S_2} = d$, kurse pastaj diskutoje. a) Vijat rrethore nuk kanë pika të përbashkëta dhe janë jashtë njëra tjetrës;
 b) Vijat rrethore priten. 14. a) $t_1: x + 3 = 0$ dhe $t_2: 3x - 4y - 15 = 0$; b) $t_1: 4x - 3y - 10 = 0$,
 $t_2: y - 2 = 0$, $t_3: 3x + 4y - 5 = 0$ dhe $t_4: x - 1 = 0$. 15. $\varphi = 90^\circ$ (ai është këndi ndërmjet të dy tangjenteve të konstruara prej pikës P). 16. $K: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$.
 17. **Udhëzim:** Caktoji pikëprerjet e dy vijave rrethore, kurse pastaj shkruaji barazimet e tangjenteve në çdonjërin prej tyre në njërin prej pikëprerjeve. Këndi ndërmjet tangjenteve është këndi nën të cilin priten vijat rrethore. Në rastin $\varphi = 90^\circ$ (vijat rrethore në këtë rast quhen ortogonale). 18. a) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$;
 b) $\frac{x^2}{100} + \frac{169y^2}{2500} = 1$; c) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$. 19. $A_1(-5,0), A_2(5,0), B_1(0,-4), B_2(0,4), F_1(-3,0)$ dhe $F_2(3,0)$.
 20. $M(\frac{2}{3}\sqrt{6}, 1)$ dhe $M_1(-\frac{2}{3}\sqrt{6}, 1)$. 21. $M_1(4,8; 4,8)$ dhe $M_2(-4,8; -4,8)$. 22. $n = \pm 12$. 23. $x + y \pm 10 = 0$
 24. $t_1: x - 5y + 9 = 0$ dhe $t_2: x + y - 3 = 0$. 25. $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$. 26. $9x^2 + 25y^2 = 225$ 27. $m = \pm 1$.
 28. $M(2, \pm 4)$. 29. **Udhëzim:** Shikoje udhëzimin e detyrës 17, $\varphi = 90^\circ$. 30. $t_1: x - y + 3 = 0$ dhe
 $t_2: x + y + 3 = 0$. 31. $t_1: y = \frac{1}{2}x + 2$ dhe $t_2: y = -\frac{1}{2}x - 2$. 32. $\varphi = \arctg 18 (\varphi \approx 87^\circ)$ 33. **Udhëzim:**
 Kuadroji dhe rregulloji barazimet dhe do të fitosh: a) elipsën $9x^2 + 4y^2 = 144$; b) $E: 25x^2 + 9y^2 = 225$;
 c) $E: 9x^2 + 4y^2 = 36$. 34. a) $5x^2 - 4y^2 = 20$; b) $100x^2 - 576y^2 = 57600$; c) $x^2 - y^2 = 16$. 35.
 $H: 3x^2 - y^2 = 12$. 36. $6x^2 - 10y^2 = 60$. 37. a) $M_1(-3,0)$ dhe $M_2(5,8)$; b) $M(2,3)$; c) nuk kanë pika të
 përbashkëta (ato janë imagjinare). 38. a) $x^2 - y^2 = 144$; b) $7x^2 - 3y^2 = 148$. 39. $m = \pm 1$. 40. $m = \pm 5$.
 41. $t: y = 2x \pm 1$. 42. $t_1: 2x - 3y \pm 1 = 0$ dhe $t_2: 2x + 3y \pm 1 = 0$. 43. $t_1: x - y \pm 1 = 0$ dhe
 $t_2: x + y \pm 1 = 0$. 44. $\varphi = 90^\circ$. 45. a), b), c) hiperbola. 46. $48x^2 + 64y^2 = 3072$. 47. a) $F(-2,0), x = 2$;
 b) $F(-\frac{3}{2}, 0), x = \frac{3}{2}$; c) $F(0, \frac{5}{2}), y = -\frac{5}{2}$; ç) $F(0,-3), y = 3$. 48. a) $d = 3\sqrt{5}$; b) $d = 6\sqrt{2}$. 49. a)
 $P: y^2 = 18x$; b) $P: y^2 = -5x$. 50. a) $M_1(0,0), M_2(\frac{1}{2}, 1)$; b) $M_1(\frac{5}{4}, \frac{25}{4}), M_2(-1,4)$. 51. a) $M_1(2, \pm 2)$ dhe
 $M_2(8, \pm 4)$; b) $M(2, \pm 4)$; c) $M(6, \pm 6)$. 52. $P: y^2 = 12x$. 53. $P(8,-3)$. 54. a) $\varphi = 90^\circ$; b) $\varphi = 90^\circ$.
 55. a); $t_2: x + y + 5 = 0$; b) $t: y = \pm \frac{1}{2}x \pm \frac{9}{2}$; c) $t: y = \pm x \pm 4$; ç) $t: y = \pm 2x \pm 2$. 56. a), b), c) parabola.

PROSVETNO DELO

ALFABETI I KONCEPTVE

A

- amplituda e funksionit 81
- asimptota e funksionit
- eksponencial 11
- logaritmik 30
- të tangensit 78
- të kotangensit 79
- të hiperbolës 222

B

- bashkësia e
- ngjarjeve elementare 150
- barazimi
- eksponencial 16
- logaritmik 32
- trigonometrik 100
- barazimi i drejtëzës
- forma eksplicite 173
- forma implicite (e përgjithshme) 174
- nëpër një pikë 176
- nëpër dy pika 177
- forma normale 188
- forma segmentale 179
- boshti
- abshisës 162
- imagjinar 221
- kotangensit 48
- ordinatës 162
- tangensit 47
- real 221

D

- direktrisa e parabolës 230
- drejtëzat normale 185
- drejtëzat paralele 185
- dendësia relative 147

E

- elipsa
- barazimi qëndror (kanonik) 211
- eksperimenti
- i determinuar 146
- jo i determinuar 146
- ekscentriciteti numerik i
- elipsës 213
- hiperbolës 221

F

- fokusi i
- elipsës 209

- parabolës 230
- hiperbolës 220
- formula e binomit 144
- funksioni
- eksponencial 9
- i kosinusit 44
- i kotangensit 45
- i vijës rrethore 47
- logaritmik 27
- tek 63
- çift 63
- i sinusit 44
- i tangensit 45

G

- grafiku i funksionit
- eksponencial 10
- logaritmik 29
- të kosinusit 76
- të kotangensit 79
- të sinusit 73
- të tangensit 77

GJ

- gjasa
- përkufizimi klasik 153
- statistike 147

H

- hiperbola
- barazimi 221
- barabrinjëse 223

I

- induksioni matematikor
- jo i plotë 126
- i plotë 126

K

- këndi
- i përgjithësuar 40
- kryesor 103
- i depresionit 119
- i elevacionit 119
- elementar 40
- i kuadrantit 42
- përmbarimi 38
- ndërmjet dy drejtëzave 183
- i orientuar 37
- i plotë 39

- shtimtar 39
- referent 68
- koeficienti i binomot 143
- koeficienti i drejtimit 173
- kombinacionet
- pa përsëritje 138
- me përsëritje 140
- kulmi i
- elipsës 210
- parabolës 231
- kushti për prekje të drejtëzës dhe
- elipsës 214
- vijës rrethore 202
- parabolës 234
- hiperbolës 225

L

- largësia
- ndërmjet dy pikave 166
- ndërmjet pikës dhe drejtëzës 191
- ndërmjet dy drejtëzave 192

N

- ngjarje
- disjunkte 150
- elementare 150
- e pamundshme 146
- e pavolitshme 151
- e volitshme 151
- e sigurtë 146
- e përbërë 150
- e rastit 146
- e kundërt 151
- normalja e
- elipsës 218
- vijës rrethore 207
- parabolës 237
- hiperbolës 228

P

- parametri i
- elipsës 213
- parabolës 230
- hiperbolës 223
- permutacionet
- pa përsëritje 133
- me përsëritje 135
- parabola
- direktrisa 230

- boshti i simetrisë 231
- barazimi kulmor (kanonik) 231
- prerja e
- dy drejtëzave 182
- drejtëzës dh elipsës 214
- drejtëzës dhe vijës rrethore 202
- drejtëzës dhe parabolës 234
- drejtëzës dhe hiperbolës 225
- pika e rëndimit 170

R

- radiani 38

S

- segmenti
- ndarja e brendshme 168
- ndarja e jashtme 168
- mesi 169
- sistemi koordinativ
- linear 160
- kënddrejtë 162

SH

- shkalla 38

T

- tangjenta e
- elipsës 217
- vijës rrethore 206
- parabolës 237
- hiperbolës 228
- teorema e
- sinusit 112
- kosinusit 116

V

- variacionet
- pa përsëritje 128
- me përsëritje 131
- vektori
- madhësia algjebrike 160
- komponenta 163
- koordinatet 162
- njësi (orta) 160
- të barabartë 164
- kolinear 160
- vija rrethore
- forma e përgjithshme e barazimit 199
- barazimi qëndror
- vija rrethore trigonometrike 46

PROSVETNO DELO

Акционерско друштво за издавање учебници и наставни средства Просветно дело - Скопје, ул. „Димитрие Чуповски“ бр. 15, Градски сид, блок 4 * За издавачот: м-р Павле Петров, генерален директор * д-р Јорданка Митевска - Иван Трајков - Лилјана Грибовска-Поповиќ: **МАТЕМАТИКА** за III година на реформираното гимназиско образование * Превод: Музафер Беќири * Лектор: Рефаил Сулејмани * Коректор: Бајрам Хаскај * Технички уредник: Новко Груевски * Ракописот е предаден во печат во август 2018. Печатењето е завршено во септември 2018. Обем: 272 страници. Формат: 20 x 25,5 cm. Книгата е отпечатена во печатницата „Коста Абраш“ - АД-Охрид

Shoqata aksionare e botimit të teksteve dhe të mjeteve mësimore Prosvetno dello - Shkup, Rr. „Dimitrie Çupovski“ nr. 15, Gradski xid, blloku 4 * Për botuesin: Mr. Pavle Petrov, drejtor i përgjithshëm * Dr. Jordanka Mitevska - Ivan Trajkov - Liljana Gribovska-Popoviq: **MATEMATIKA** për vitin III të gjimnazit të reformuar * Përkthyes: Muzafer Beqiri * Lektor: Refail Sulejmani * Korrektor: Bajram Haskaj * Redaktor teknik: Novko Gruevski Dorëshkrimi u dorëzua në shtyp në gusht 2018. Libri doli nga shtypi në shtator 2018. Madhësia: 272 faqe. Formati: 20 x 25,5 cm. Libri u shtyp në shtypshkronjën „Kosta Abrash“ - Ohër.